

THESE

SUR LES LOIS DE LA PHOTOELASTICITE

Présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy
pour obtenir le grade de Docteur ès—Sciences Physiques

par

A. Henri ROBERT

soutenue le 25 Mai 1970, devant la Commission d'Examen

JURY :

Messieurs	J. GOSSE	Président
	A. KAMMERER	} Examinateurs
	M. PLAN	
	D. PAULMIER	

PUBLICATIONS DE L'UNIVERSITE DE NANCY
COLLECTION DES THESES DE LA FACULTE DES SCIENCES
SCIENCES PHYSIQUES

THESE

SUR LES LOIS DE LA PHOTOELASTICITE

Présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy
pour obtenir le grade de Docteur ès-Sciences Physiques

par

A. Henri ROBERT

soutenue le 25 Mai 1970, devant la Commission d'Examen

JURY :

Messieurs	J. GOSSE	Président
	A. KAMMERER	} Examineurs
	M. PLAN	
	D. PAULMIER	



ANNEE SCOLAIRE 1969/70

Doyen : M. AUBRY
 Assesseur : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT – ROUBAULT

Professeurs honoraires : MM. RAYBAUD – LAFFITE – LERAY – JOLY – LAPORTE – EICHBORN – CAPELLE – GODEMENT – DUBREIL – L. SCHWARTZ – DIEUDONNE – LONGCHAMBON – LETORT – DODE – GAUTHIER – GOUDET – OLMER – CORNUBERT – CHAPELLE – GUERIN – WAHL

Maîtres de Conférences honoraires : MM. LIENHART – PIERRET – M^{le} MATHIEU

PROFESSEURS

MM. ROUBAULT	<i>Géologie</i>	HADNI	<i>Physique</i>
VEILLET	<i>Biologie animale</i>	* BASTICK	<i>Chimie</i>
BARRIOL	<i>Chimie Théorique</i>	DUCHAUFOUR	<i>Pédologie</i>
BIZETTE	<i>Physique</i>	GARNIER	<i>Agronomie</i>
GUILLIEN	<i>Electronique</i>	NEEL	<i>Chimie Organique Indust.</i>
LEGRAS	<i>Mécanique Rationnelle</i>	BERNARD	<i>Géologie Appliquée</i>
BOLFA	<i>Minéralogie</i>	* CHAMPIER	<i>Physique</i>
NICLAUSE	<i>Chimie</i>	* GAY	<i>Chimie Biologique</i>
FAIVRE	<i>Physique Appliquée</i>	STEPHAN	<i>Zoologie</i>
AUBRY	<i>Chimie Minérale</i>	* CONDE	<i>Zoologie</i>
COPPENS	<i>Radiogéologie</i>	* WERNER	<i>Botanique</i>
DUVAL	<i>Chimie</i>	EYMARD	<i>Calcul Différentiel & Intégral</i>
FRUHLING	<i>Physique</i>	FELDEN	<i>Physique</i>
HILLY	<i>Géologie</i>	* GOSSE	<i>Mécanique Physique</i>
LE GOFF	<i>Génie Chimique</i>	* DAVOINE	<i>Physique (ENSMIM)</i>
SUHNER	<i>Physique Expérimentale</i>	HORN	<i>Physique (1er Cycle)</i>
CHAPON	<i>Chimie Biologique</i>	* ROCCI	<i>Géologie</i>
HEROLD	<i>Chimie Minérale Indust.</i>	* M ^{me} LUMER	<i>Maths</i>
SCHWARTZ B.	<i>Exploitation Minière</i>	DELPUECH	<i>Chimie Physique</i>
MALAPRADE	<i>Chimie</i>	M ^{le} HUET	<i>Analyse Supérieure</i>
* MANGENOT	<i>Botanique</i>	BLAZY	<i>Minéralogie Appliquée</i>
GAYET	<i>Physiologie</i>		

N *Chimie Biologique*

N *Mécanique Appliquée*

N *Analyse Supérieure*

N *Méthodes Mathématiques de la Physique*

N *Mécanique Rationnelle*

(*) *Professeur titulaire à titre personnel*

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme BASTICK	<i>Chimie P.C. Epinal</i>	JANOT	<i>Physique P.C. Epinal</i>
MM. GUDEFIN	<i>Physique</i>	CACHAN	<i>Entomologie Appl. (ENSA)</i>
VUILLAUME	<i>Psychophysiologie</i>	JACQUIN	<i>Pédologie & Chimie agricoles</i>
FRENTZ	<i>Biologie Animale</i>	MAINARD	<i>Physique M.P.</i>
MARI	<i>Chimie (ISIN)</i>	MARTIN	<i>Chimie P.C.</i>
DEVIOT	<i>Physique du Solide</i>	PAULMIER	<i>Mécanique Expérimentale</i>
FLECHON	<i>Physique P.C.</i>	PROTAS	<i>Minéralogie</i>
VIGNES	<i>Métallurgie</i>	RIVAIL	<i>Chimie Appliquée CUCES</i>
JURAIN	<i>Géologie C.B.G.</i>	DEPAIX	<i>Probabilités et Statistiques</i>
BALESDENT	<i>Thermodynamique, Chimie Appliquée (ENSIC)</i>		

MAITRES DE CONFERENCES

MM. VILLERMAUX	<i>Génie Chimique</i>	HILY	<i>Mathématiques P.C.</i>
METCHE	<i>Biochimie appliquée (Brasserie)</i>	CASTRO	<i>Chimie organique</i>
BAUMANN	<i>Physique 1er Cycle</i>	DEXHEIMER	<i>Botanique</i>
DURAND	<i>Physique</i>	NOVERRAZ	<i>Mathématiques</i>
GRANGE	<i>Physique (ISIN)</i>	TOURET	<i>Géologie</i>
BAVEREZ	<i>Chimie (ENSIC)</i>	N	<i>Maths appliquées</i>
CHAMBON	<i>Exploit. Minière (Mines)</i>	N	<i>Mathématiques</i>
HUSSON	<i>Physique (ENSEM)</i>	N	<i>Mathématiques</i>
WEISSLINGER	<i>Physique</i>	N	<i>Physiologie animale</i>
GERL	<i>Physique (ENSEM)</i>	N	<i>Chimie (ENSIC)</i>
ROQUES	<i>Chimie Minérale</i>	N	<i>Laiterie (Ecole Lait.)</i>
FERRIER	<i>Mathématiques</i>	N	<i>Chimie organique</i>
GILORMINI	<i>Mécanique fluid. ISIN</i>	N	<i>Maths appliquées</i>

CHARGES D'ENSEIGNEMENTS

MM. AMARIGLIO – COEURE – DAVRAINVILLE – GIRARDEAU – OVAERT – RUYER – WEBER – PUJOL – SCHREIBER.

Le présent travail a été poursuivi durant plusieurs années dans le laboratoire de mécanique de L'E.N.S.E.M.

Monsieur le Professeur J. GOSSE, Directeur de ce laboratoire et Directeur de l'E.N.S.E.M. ne saurait être assez remercié pour l'aide efficace, les conseils et les facilités qu'il nous a accordés et prodigués durant ces dernières années. Nous tenons à lui exprimer toute notre reconnaissance pour l'attention qu'il apporté à nos travaux et à la rédaction de ce mémoire.

Nous exprimons notre gratitude à Monsieur A. KAMMERER, Professeur à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures et Directeur du Laboratoire du matériel et de la traction à la S.N.C.F. pour l'amabilité avec laquelle il a bien voulu relire et corriger nos études et nous faire l'honneur de participer à notre jury de thèse.

Que Monsieur M. PLAN, Professeur à la Faculté des Sciences et Directeur du département GENIE MECANIQUE à l'I.U.T. d'Orléans-la-Source, veuille bien trouver ici nos très sincères remerciements pour les encouragements qu'il a toujours su nous donner et pour sa présence dans notre jury.

Nous n'oublierons pas les conseils fructueux et amicaux que nous trouvés auprès de tous les professeurs de l'Ecole et tout particulièrement Monsieur le Professeur D. PAULMIER ainsi que des ingénieurs et techniciens des laboratoires de la SO.PE.MEA., du C.N.E.S., de l'O.N.E.R.A. de la Marine Nationale, de la S.N.C.F., des PONTS et CHAUSSEES et de diverses sociétés spécialisées en photoélasticité.

Une pensée particulière sera pour nos camarades de laboratoire et tout le personnel technique et administratif qui nous ont aidé dans ce travail.

Que tous trouvent ici l'expression de notre meilleure reconnaissance.

TABLE DES MATIERES

	<i>Pages</i>
CHAPITRE 0 – Introduction	0
CHAPITRE I – Les lois classiques de l'élasticité – Expressions nouvelles :	1
<i>a) La photoélasticité.</i>	<i>1</i>
<i>b) Les lois de Neumann.</i>	<i>1</i>
<i>c) Les lois de Maxwell.</i>	<i>2</i>
<i>d) Définitions.</i>	<i>2</i>
<i>e) Nouvelle expression des lois de la Photoélasticité.</i>	<i>2</i>
<i>f) Domaine d'utilisation de ces lois.</i>	<i>4</i>
<i>g) L'état de biréfringence considéré comme une fonction des états de contrainte et de déformation.</i>	<i>5</i>
<i>h) Définition de l'état mécanique.</i>	<i>7</i>
<i>i) Nouvelle loi sur la Photoélasticité.</i>	<i>7</i>
<i>j) Cas où les tenseurs contrainte et déformation sont coaxiaux.</i>	<i>8</i>
<i>k) Cas où les tenseurs contrainte et déformation n'ont pas les mêmes directions principales.</i>	<i>10</i>
<i>l) Relations générales.</i>	<i>11</i>
CHAPITRE II – Vérifications expérimentales dans les cas de coaxialité des tenseurs contrainte et déformation :	15
<i>a) Choix et principes des mesures.</i>	<i>15</i>
<i>b) Matériau d'essai.</i>	<i>16</i>
<i>c) Enceinte thermique.</i>	<i>16</i>
<i>d) Les éprouvettes – les sollicitations appliquées – calcul des contraintes.</i>	<i>18</i>
<i>e) Mesure de la biréfringence.</i>	<i>19</i>
<i>f) Mesure des déformations.</i>	<i>20</i>
<i>g) Mesure de la température de l'éprouvette.</i>	<i>23</i>
<i>h) Expériences à contrainte constante et température variable.</i>	<i>24</i>
<i>i) Essais à déformation constante et température constante.</i>	<i>26</i>

<i>i) Essais à déformation constante et température constante.</i>	26
<i>j) Expériences Biréfringence — Déformation.</i>	27
<i>k) Discussion et remarques générales.</i>	29
<i>l) Méthodes de détermination des constantes A et B.</i>	29

CHAPITRE III — Vérifications expérimentales dans les cas de non-coaxialité des tenseurs contrainte et déformation :

<i>a) Introduction.</i>	31
<i>b) Etude d'un cas particulier.</i>	32
<i>c) Essais et résultats</i>	36
<i>d) Observations.</i>	39

CHAPITRE IV — Etudes dynamiques :

<i>a) Généralités et rappels théoriques.</i>	41
<i>b) Les caractéristiques complexes.</i>	43
<i>c) Essais et résultats :</i>	44
<i>A) Le coefficient de Poisson ne dépend pas de la fréquence.</i>	44
<i>B) Mesure du module d'Young dynamique E^*</i>	45
<i>C) Mesure de la constante optico-mécanique K^*</i>	50
<i>D) Etude des caractéristiques A^* et B^*</i>	51
<i>E) Observations</i>	52

CHAPITRE V — Conclusions

54

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

55

NOTATIONS

E_i	— composantes du vecteur champ électrique $\vec{E}$
D_i	— composantes du vecteur induction électrique $\vec{D}$
η_{ij}	— tenseur des indices
N, n	— indice de réfraction
ϵ, ϵ	— déformation
ϵ_{ij}	— tenseur déformation
σ	— contrainte
σ_{ij}	— tenseur contrainte
m	— "état mécanique"
m_{ij}	— tenseur mécanique
S_ϵ, S_0, S_m	— invariant d'ordre un des tenseurs ϵ_{ij} , σ_{ij} et m_{ij} respectivement
E, E^*	— module d'YOUNG statique, dynamique.
G, G^*	— module de COULOMB statique, dynamique.
ν, ν^*	— coefficient de POISSON statique, dynamique.
K, K^*	— constante optico-déformation statique, dynamique.
C, C^*	— constante optico-contrainte statique, dynamique.
W, W^*	— constante optico-mécanique statique, dynamique.
A, A^*	— constante caractéristique, statique, dynamique.
B, B^*	— constante caractéristique, statique, dynamique.
θ	— température
t	— temps
T	— durée

$\chi, \delta, \gamma,$	— angle (fig. I - k - 1)
α	— dilatation linéaire
σ_{ij}^{θ}	— tenseur contrainte thermique
$\Delta\theta$	— variation de température
δ_{ij}	— symbole de krönecker
F	— effort de traction
A	— aire d'une section
δ_m	— différence de marche optique
k	— numéro d'ordre de frange
e	— épaisseur traversée par la lumière
λ	— longueur d'onde
R	— résistance électrique
K_L	— coefficient longitudinal de jauge de contrainte
K_T	— coefficient transversal de jauge de contrainte
ΔV	— variation de tension électrique
V_o	— tension électrique
ΔL	— variation de longueur
L	— longueur
$\psi, \chi, \delta,$	— angles (fig. III - b - 1)
$(C_o), (C)$	— cercles
$(E_o), (E), (E'_o)$	— ellipses
C_{θ}	— valeur de C à la température θ
ρ	— masse volumique
M	— masse
F	— force
v	— "vitesse" de propagation des ondes élastiques
v_o	— vitesse
η	— coefficient de viscosité linéaire

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$$

f — fréquence

$\omega = 2\pi f$ — fréquence angulaire, pulsation,

φ — différence de phase

S_L, S_T — tension électrique démodulée à la sortie d'un pont extensométrique

u — déplacement.

CHAPITRE 0

INTRODUCTION

Après la lecture des traités de photo-élasticité [0—1], il demeure quelques questions fondamentales sans réponses précises telles que :

- quelles sont les limites des lois de la photoélasticité classique ?*
- l'état de biréfringence est-il conséquence de l'état des contraintes ou de l'état des déformations ?*
- les axes optiques sont-ils ceux des déformations ou ceux des contraintes ?*
- les lois de la photoélasticité sont-elles applicables dans le cas de sollicitations dynamiques ?*

Grâce à de nombreux contacts avec les laboratoires extérieurs [0—2] et avec des spécialistes réunis au cours d'un cycle de conférences [0—3] organisé à l'E.N.S.E.M. sur le sujet "Milieux continus et photoélasticité", il nous a été possible de réfléchir sur ces problèmes et de tenter d'apporter quelques solutions.

Nous avons d'abord mis les lois classiques de MAXWELL et NEUMANN sous une forme plus concise. Puis grâce à la définition et à l'introduction d'un "tenseur mécanique", nous montrons qu'il est possible de donner à l'expression de ces lois une formulation nouvelle, regroupant les tenseurs des déformations des contraintes et des indices, valable semble-t-il au delà du domaine élastique.

L'établissement de ces nouvelles lois, les réflexions qu'elles inspirent, et leurs vérifications expérimentales sur un matériau particulièrement biréfringent : l'araldite, constituent l'essentiel de ce travail.

CHAPITRE I

LES LOIS CLASSIQUES DE LA PHOTOELASTICITE EXPRESSIONS NOUVELLES

I - a — LA PHOTOELASTICITE

La photoélasticité est l'étude des phénomènes de biréfringence que l'on constate dans certains milieux transparents soumis à des sollicitations.

Découverts par BREWSTER en 1816, ces phénomènes ont abondamment été étudiés par de nombreux chercheurs [I-a-1].*

Ce sont les expériences de NEUMANN en 1841 [I-a-2], puis celles similaires de MAXWELL en 1852 [I-a-3] qui permirent d'en dégager les lois classiques utilisées jusqu'à présent [I-a-4].

I - b — LES LOIS DE NEUMANN

Neumann attribua l'effet biréfringent à la déformation et énonça deux lois :

Première loi :

Si un milieu transparent initialement isotrope devient biréfringent par déformation, les directions de polarisation de la lumière issue d'un point de ce milieu, sont parallèles aux directions principales de la section de la quadrique associée au tenseur déformation en ce point, par le plan diamétral parallèle au plan d'onde de la lumière atteignant le point considéré.

Deuxième loi :

En ce point, la différence des carrés des vitesses normales de propagation d'une onde dans le milieu isotrope et d'une onde polarisée ne dépend que de la déformation dans la direction de vibration de cette onde, et de la dilatation, c'est-à-dire de l'invariant d'ordre un, du tenseur déformation en ce point.

*** FRESNELL, NEUMANN, WERTHEIM, MAXWELL, MACH, KERR, POCKELS, FILON, FROCHT, etc . . .**

Si on néglige les termes d'ordre supérieur au premier, dans le développement en série, cette différence est une forme linéaire de ces deux quantités.

Pour la plupart des matériaux biréfringents, l'écart relatif maximum des vitesses de propagation est inférieur à 10^{-3} [1-b-1]. En première approximation, on peut donc considérer la différence des carrés des vitesses comme proportionnelle à la différence des vitesses, à laquelle on peut substituer, à un coefficient constant près, la différence des indices de réfraction correspondants [1-b-2]. On obtient alors une expression bien connue de cette deuxième loi.

Il arrive souvent que l'on expérimente de telle façon que le plan d'onde de la lumière incidente soit un plan principal de la quadrique associée au tenseur déformation. Dans ce cas, les directions principales dans ce plan, ainsi que la direction normale à ce plan, sont les directions principales de ce tenseur. La deuxième loi est alors exprimée à partir des déformations principales et des indices correspondants qui sont les indices de réfraction principaux.

I - c – LES LOIS DE MAXWELL

Maxwell effectua des études expérimentales similaires de celles de Neumann mais en considérant que l'état de biréfringence est une conséquence de l'état de contrainte. Les résultats qu'il obtient sont analogues à ceux de Neumann au remplacement près du mot déformation par celui de contrainte.

I - d – DEFINITIONS

a) Directions principales secondaires :

On appelle ainsi les directions principales de la section de la quadrique associée à un tenseur du second ordre, par un plan diamétral.

b) Tenseur des indices :

En un point d'un milieu transparent, l'état d'anisotropie optique, qui est la cause de l'état de biréfringence, peut être entièrement déterminé à partir de l'ellipsoïde des indices [1-b-2]. Or celui-ci est homothétique de la quadrique associée au tenseur des indices $\hat{\eta}_{ij}$ défini par :

$$E_i = \hat{\eta}_{ij} D_j$$

Dans un système d'axes trirectangles, E_i et D_j sont respectivement les composantes des vecteurs champ électrique $\vec{E}$ et induction électrique $\vec{D}$, qui sont associés à toute onde lumineuse d'après la théorie électromagnétique de la lumière [1-b-2] et [1-d-1].

I - e – NOUVELLE EXPRESSION DES LOIS DE LA PHOTOELASTICITE

Compte tenu des définitions précédentes les lois de Neumann peuvent s'exprimer sous la forme condensée suivante :

Dans un milieu transparent isotrope, rendu biréfringent par déformation, les tenseurs des indices et des déformations en un même point ont mêmes directions principales secondaires.

S'il en est ainsi la première loi de Neumann est satisfaite. D'après la théorie électromagnétique de la propagation de la lumière dans un milieu anisotrope, on sait en effet qu'une vibration abordant un point d'un tel milieu ne peut se propager au delà, que suivant deux vibrations polarisées rectilignes (phénomène de biréfringence), de directions rectangulaires, qui sont celles des axes de la section de l'ellipsoïde des indices, par le plan d'onde de la lumière incidente en ce point [1-b-2].

La deuxième loi est aussi satisfaite. On montre facilement en effet que si le tenseur des indices et des déformations ont mêmes directions principales secondaires, ils ont nécessairement mêmes directions principales. Dans leurs axes principaux communs, les quadriques associées à ces tenseurs ont pour équations :

1 déformations : $\epsilon_1 X_1^2 + \epsilon_2 X_2^2 + \epsilon_3 X_3^2 = 1$

2 indices : $\frac{X_1^2}{N_1^2} + \frac{X_2^2}{N_2^2} + \frac{X_3^2}{N_3^2} = 1$

dans lesquelles ϵ_i et N_i sont respectivement les déformations et les indices principaux.

La condition de coïncidence des axes secondaires s'écrit [1-e-1] :

3
$$\frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{N_1^2} + \frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{N_2^2} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{N_3^2} = 0$$

Elle est rigoureusement satisfaite par des relations du type :

4
$$\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{N_i^2} = K \epsilon_i + K_1 S_\epsilon + K_2 S_\epsilon^2 + K'_2 (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) + K_3 S_\epsilon^3 + K'_3 (\epsilon_1^3 + \epsilon_2^3 + \epsilon_3^3) + \dots$$

où $n_0, K, K_1, K_2, K'_2, K_3, \dots$ sont des constantes et S_ϵ est le premier invariant du tenseur déformation.

Par un changement d'axes permettant de passer des coordonnées principales, à des coordonnées rectangulaires quelconques de même origine, on déduit [I-e-2].

5

$$\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n_i^2} = K \epsilon_i + K_1 S_\epsilon + K_2 S_\epsilon^2 + K'_2 (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) + \\ K_3 S_\epsilon^3 + K'_3 (\epsilon_1^3 + \epsilon_2^3 + \epsilon_3^3) + \dots$$

dans lesquelles n_i et ϵ_i sont respectivement les indices et les déformations dans la direction d'un des axes de coordonnées.

Si on limite le développement au premier ordre, on retrouve bien la deuxième loi de Neumann. De plus, on remarquera que les relations obtenues sont alors formellement semblables aux relations de LAME [I-e-2] entre contraintes et déformations en élasticité linéaire. Cette analogie résulte de l'identification de tenseurs coaxiaux dans des conditions fondamentalement semblables (homogénéité du milieu, isotropie phénoménologique) [I-e-3].

Dans les mêmes conditions, les lois de Maxwell sont entièrement contenues dans dans la proposition :

Dans un milieu transparent isotrope, rendu biréfringent par contrainte, les tenseurs des indices et des contraintes en un même point ont mêmes directions principales secondaires.

Ces expressions originales, des lois de la photoélasticité que nous venons de présenter permettent plus facilement d'en discuter les limites et les conditions d'application.

I - f – DOMAINE D'UTILISATION DE CES LOIS

Il résulte de l'étude précédente que les lois de Neumann et de Maxwell sont équivalentes et peuvent être indifféremment utilisées si les tenseurs des contraintes et des déformations ont aussi mêmes directions principales secondaires.

Ils doivent donc être coaxiaux et entre les contraintes et les déformations, il doit exister des relations de la forme :

1

$$\sigma_i = c \epsilon_i + c_1 S_\epsilon + c_2 S_\epsilon^2 + \dots$$

ou

$$\epsilon_i = d \sigma_i + d_1 S_\sigma + d_2 S_\sigma^2 + \dots$$

dans lesquelles $c, c_1, c_2 \dots d, d_1, d_2 \dots$ sont des constantes et S_ϵ et S_σ les invariants d'ordre un, respectivement des tenseurs déformation et contrainte.

On constate que ces relations ne sont pas nécessairement linéaires ni même représentatives d'un comportement élastique. Elles permettent peut-être de comprendre le fait connu depuis longtemps, à savoir que les lois classiques de la photoélasticité se sont révélées exactes pour des tensions ou des déformations variant dans un champ très étendu, qui dépasse souvent la limite d'élasticité. Dans le cas du verre par exemple, elles restent valables semble-t-il jusqu'à la rupture [I-f-1].

En résumé, le domaine d'application simultanée de ces lois est donc limité par des conditions que l'on peut écrire :

- a) Coaxialité des tenseurs contrainte et déformation*
- b) Possibilité de représenter le comportement du matériau par des relations du type indiqué (1).*

Dans ce domaine commun de validité, il est évidemment impossible de préciser si le tenseur des indices se modèle sur celui des contraintes ou sur celui des déformations.

Dans le cas des expériences de fluage ou de relaxation, la coaxialité des tenseurs contrainte et déformation peut-être maintenue, mais la loi de comportement n'est pas nécessairement de la forme indiquée précédemment. Les lois de Neumann et de Maxwell ne doivent pas être en général simultanément valables. De fait, suivant le type d'essai, seules les unes ou les autres de ces lois sont applicables et on constate que pour un même matériau biréfringent, le tenseur des indices peut-être considéré comme lié soit au tenseur des déformations, soit au tenseur des contraintes, soit aux deux à la fois.

Dans le cas d'expériences où la coaxialité des tenseurs contrainte et déformation n'est pas maintenue, les relations de comportement indiquées plus haut ne doivent plus être applicables de même que les lois de Neumann et Maxwell. Or on constate toujours l'existence de phénomène de biréfringence et on peut se demander alors comment s'établit le tenseur des indices.

I - g – L'ETAT DE BIREFRINGENCE CONSIDERE COMME UNE FONCTION DES ETATS DE CONTRAINTE ET DE DEFORMATION

Pour tenter de répondre à la question précédente, il faut faire une analyse des faits expérimentaux.

Si on considère, par exemple, une éprouvette transparente, présentant des phénomènes de biréfringence lors d'un essai uniaxial dont le programme de charge est représenté sur la figure (I-g-1), l'expérience montre qu'à chaque point représentatif de cette évolution correspond une certaine biréfringence qui n'est reliée d'une façon biunivoque ni à l'état des contraintes ni à celui des déformations sauf en quelques domaines où le phénomène est élastique [I-g-1].

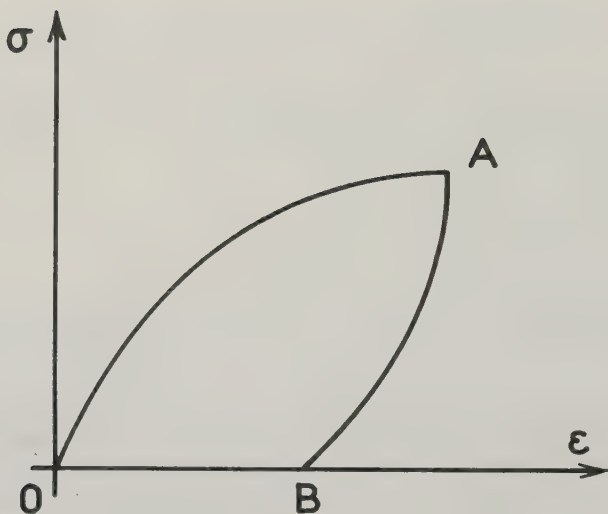


FIGURE (I - g - 1)
Programme de charge d'une éprouvette

De plus de nombreux essais [I-g-2] montrent que cet état de biréfringence peut être entièrement défini par la donnée simultanée de ces deux états, quelle que soit l'histoire des sollicitations nécessaires pour les atteindre, à condition bien entendu que ces sollicitations mécaniques ou thermiques, ne modifient pas la nature ou l'état du milieu.

Par ailleurs, les expériences bien connues du figeage des contraintes [I-g-3], au cours desquelles la biréfringence reste constante durant tout le temps de refroidissement, puisque le réseau des franges observées demeure pratiquement inaltéré durant tout ce temps, semblent montrer que les évolutions de la température n'ont pas d'influence importante sur l'état de biréfringence d'un milieu dans un état de contrainte-déformation donné.

Enfin, on remarquera que, quel que soit le cycle des sollicitations mécaniques ou thermiques subies par une éprouvette biréfringente, initialement isotrope et donc à biréfringence nulle, si le milieu redevient isotrope, la biréfringence redevient nulle. Il n'est donc pas étrange que l'histoire des sollicitations considérées n'ait pas d'influence sur l'état de biréfringence.

On peut alors admettre que l'état de biréfringence peut être considéré comme une fonction des états simultanés des contraintes et des déformations, et cette fonction doit être indépendante de la température et du temps.

I - h – DEFINITION DE L'ETAT MECANIQUE

On appelle " état mécanique " en un point une fonction des tenseurs contrainte et déformation en ce point.

Si on admet que cette fonction a la forme simple suivante :

$$1 \quad a \sigma_{ij} + b \epsilon_{ij}$$

où a et b sont des constantes, on peut définir en tous points d'un milieu, un " tenseur mécanique " du second ordre par la relation :

$$2 \quad m_{ij} = a \sigma_{ij} + b \epsilon_{ij}$$

On admettra que l'état mécanique est entièrement défini par ce tenseur.

I - i – NOUVELLE LOI SUR LA PHOTOELASTICITE

On considère que l'état mécanique est seul responsable de la biréfringence. Dans le but de retrouver facilement les lois de Neumann et de Maxwell, on choisit comme état mécanique la fonction simple (I-h-1) signalée au paragraphe précédent.

Par analogie avec les expressions des lois telles que nous les avons données au paragraphe (I-e), nous énoncerons la nouvelle loi :

En tous points d'un milieu rendu biréfringent par contrainte et déformation , le tenseur des indices et le tenseur mécanique ont mêmes directions principales secondaires.

On sait qu'ils doivent aussi avoir mêmes directions principales. On est alors conduit à des relations de la forme :

$$1 \quad \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_i^2} = W m_i + W_1 S_m + W_2 S_m^2 + \dots$$

où n_o , W , W_1 , W_2 ... sont des constantes et S_m l'invariant d'ordre un du tenseur mécanique.

Compte tenu de l'approximation signalée au paragraphe (I-b) sur la différence des carrés des vitesses de propagation de la lumière, des relations précédentes on déduit des expressions telles que :

$$2 \quad (n_i - n_j) = W (m_i - m_j)$$

Nous rappelons que dans les mêmes conditions, la loi de Neumann s'écrit :

$$(n_i - n_j) = K (\epsilon_i - \epsilon_j)$$

et celle de Maxwell :

$$(n_i - n_j) = C (\sigma_i - \sigma_j)$$

où K , C , ainsi que W sont des constantes caractéristiques du matériau.

C'est sous cette forme commode (1-i-2) que nous effectuerons la vérification de la nouvelle loi photoélastique proposée. Pour cela, il est nécessaire de pouvoir exprimer la différence $(m_i - m_j)$ des composantes secondaires du tenseur mécanique. Nous envisagerons plusieurs cas simples.

1 - j - LES TENSEURS CONTRAINTE ET DEFORMATION SONT COAXIAUX

Dans ce cas le tenseur mécanique m_{ij} a aussi les mêmes directions principales que les tenseurs σ_{ij} et ϵ_{ij} . En remplaçant, il vient :

$$(n_i - n_j) = A (\sigma_i - \sigma_j) + B (\epsilon_i - \epsilon_j)$$

où $A = Wa$, et $B = Wb$, sont des constantes.

Compte tenu de l'approximation signalée, la relation Biréfringence - Contrainte - Déformation est linéaire.

Dans le domaine élastique linéaire, on sait : [1-g-1]

$$(\sigma_i - \sigma_j) = \frac{E}{(1 + \nu)} (\epsilon_i - \epsilon_j)$$

E module d'Young.

ν coefficient de Poisson.

Alors :

$$(n_i - n_j) = \left[A + B \frac{1 + \nu}{E} \right] (\sigma_i - \sigma_j) = C (\sigma_i - \sigma_j)$$

$$(n_i - n_j) = \left[\frac{A E}{1 + \nu} + B \right] (\epsilon_i - \epsilon_j) = K (\epsilon_i - \epsilon_j)$$

Et on retrouve les lois classiques de la photoélasticité avec :

$$A + B \frac{(1 + \nu)}{E} = C$$

4

ou
$$\frac{AE}{(1 + \nu)} + B = K$$

puisque
$$K = \frac{CE}{(1 + \nu)}$$

Nous avons vu [paragraphe I - i] que la relation Biréfringence - Contrainte - Déformation (en abrégé relation B - C - D) ne doit pas dépendre de la température θ . Il doit donc en être de même des constantes A et B. Or, différentes publications [I-j-1] montrent que E, ν , K et C sont en général des fonctions de θ . Comme les égalités (I-j-4) doivent être satisfaites quelle que soit la température, on déduit que les quantités :

$$\frac{(1 + \nu)}{E} \quad \text{et} \quad C$$

sont liées par une relation linéaire indépendante de θ . Il en est de même corrélativement des quantités :

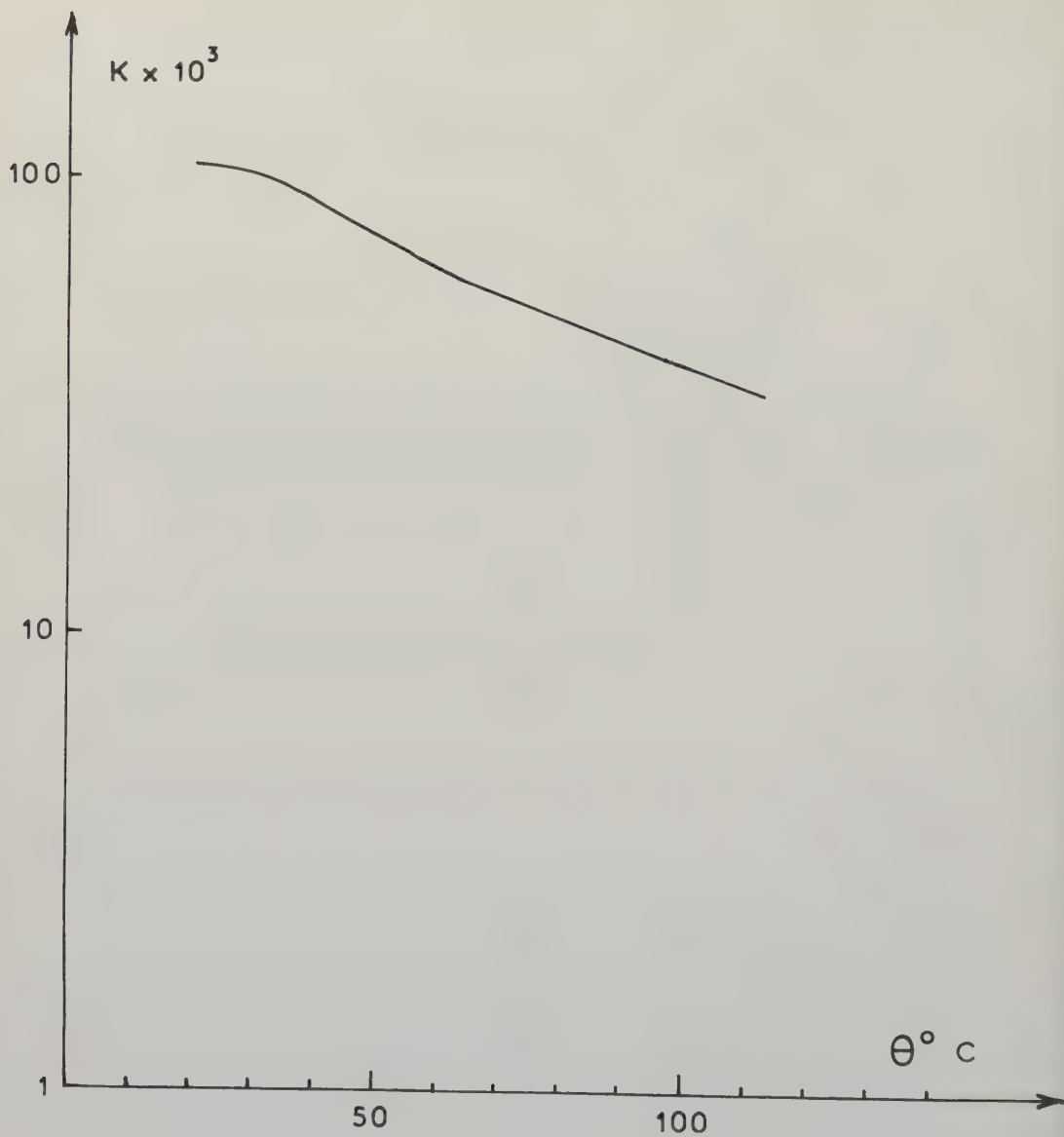
$$\frac{E}{(1 + \nu)} \quad \text{et} \quad K$$

Et par dérivation du système (4) on constate que $dC / d\theta$ et $dK / d\theta$ sont de signe contraire.

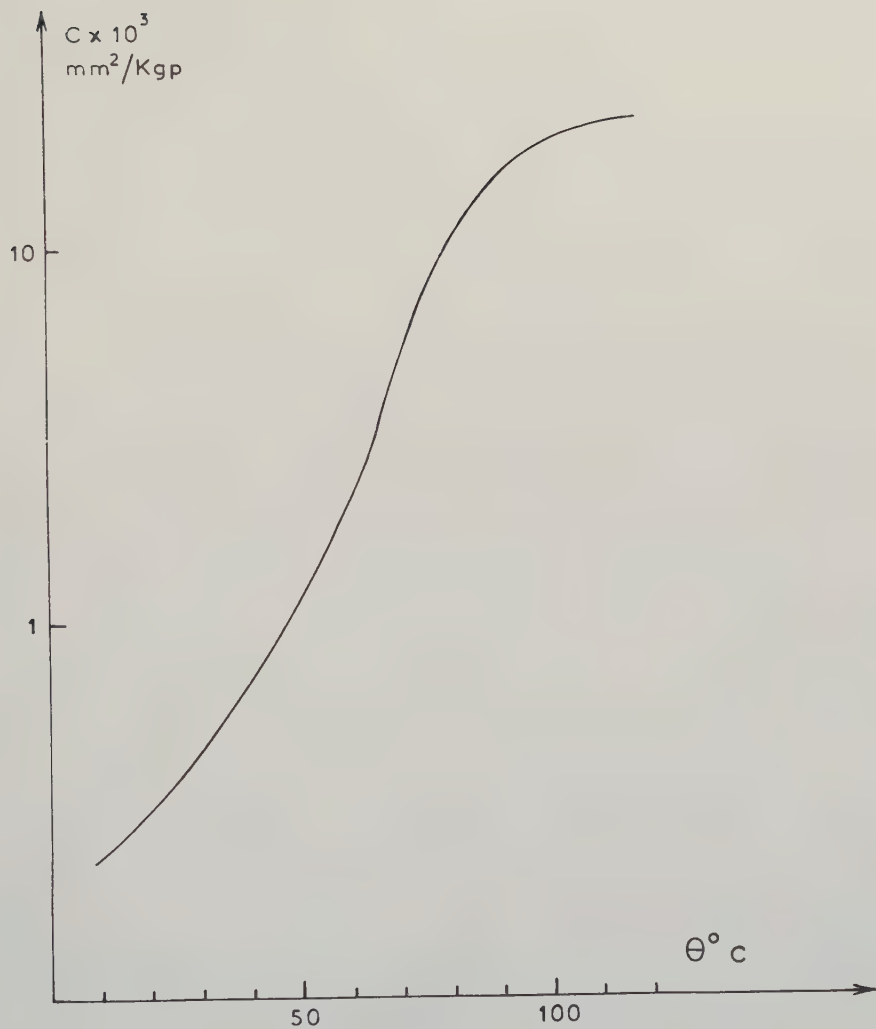
Cette conclusion peut immédiatement être vérifiée en considérant les résultats expérimentaux obtenus par certains auteurs [I-j-2] et représentés sur les graphes (I-j-1, 2 et 3), par la courbe moyenne d'évolution respectivement de K, C et E en fonction de θ , pour une araldite du type D [I-j-3]. Entre 10 et 50°C, les nuages de points expérimentaux que nous n'avons pas reportés, suivent d'assez près la courbe moyenne avec des écarts compris entre 5 et 10%. Au delà de 60°C, la dispersion des points obtenus par ces différents auteurs va augmentant et les écarts sont de l'ordre de 30 à 40% au voisinage de 100°C. On constate bien que C (θ) est une fonction croissante tandis que K (θ) est une fonction décroissante de θ .

Par ailleurs, le coefficient de Poisson, ν varie peu avec la température [I-j-4] et pour une araldite D, on a :

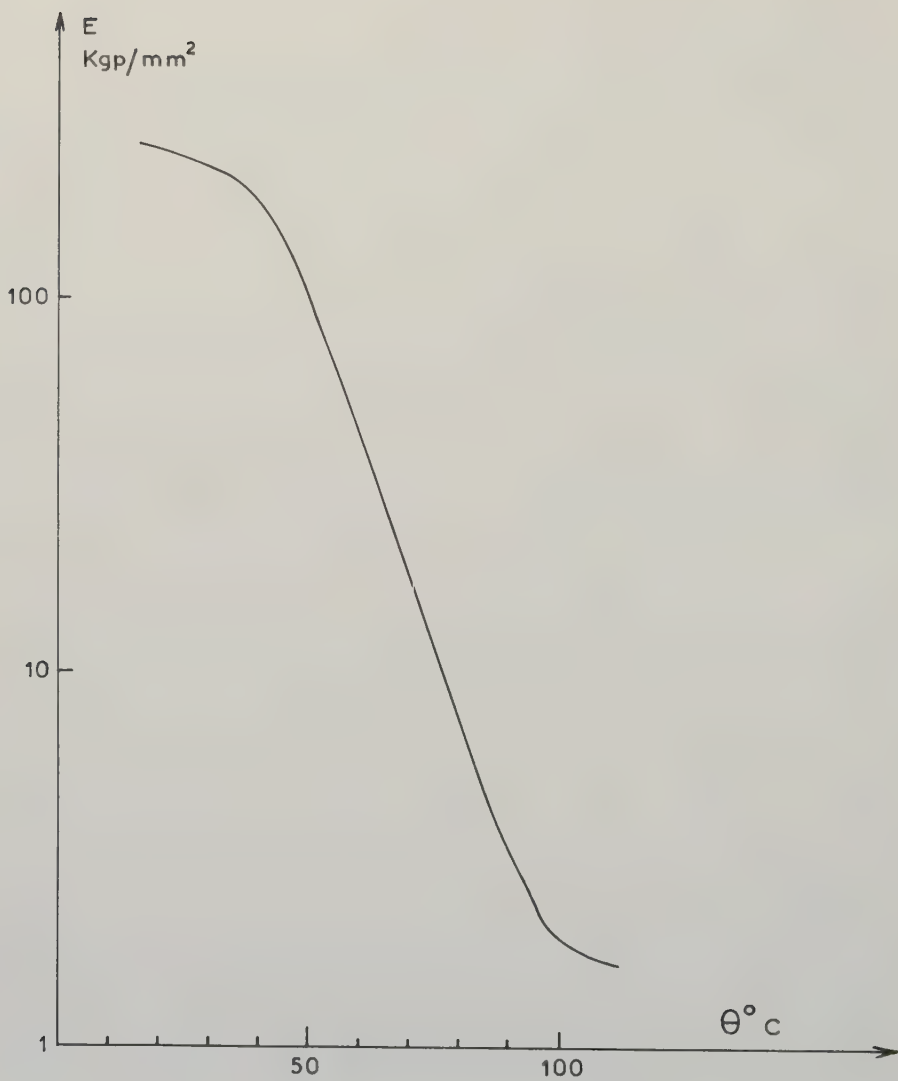
$\theta^\circ \text{C}$	10	20	30	40	50	60	70	80
ν	0,37	0,37	0,38	0,39	0,39	0,40	0,41	0,41



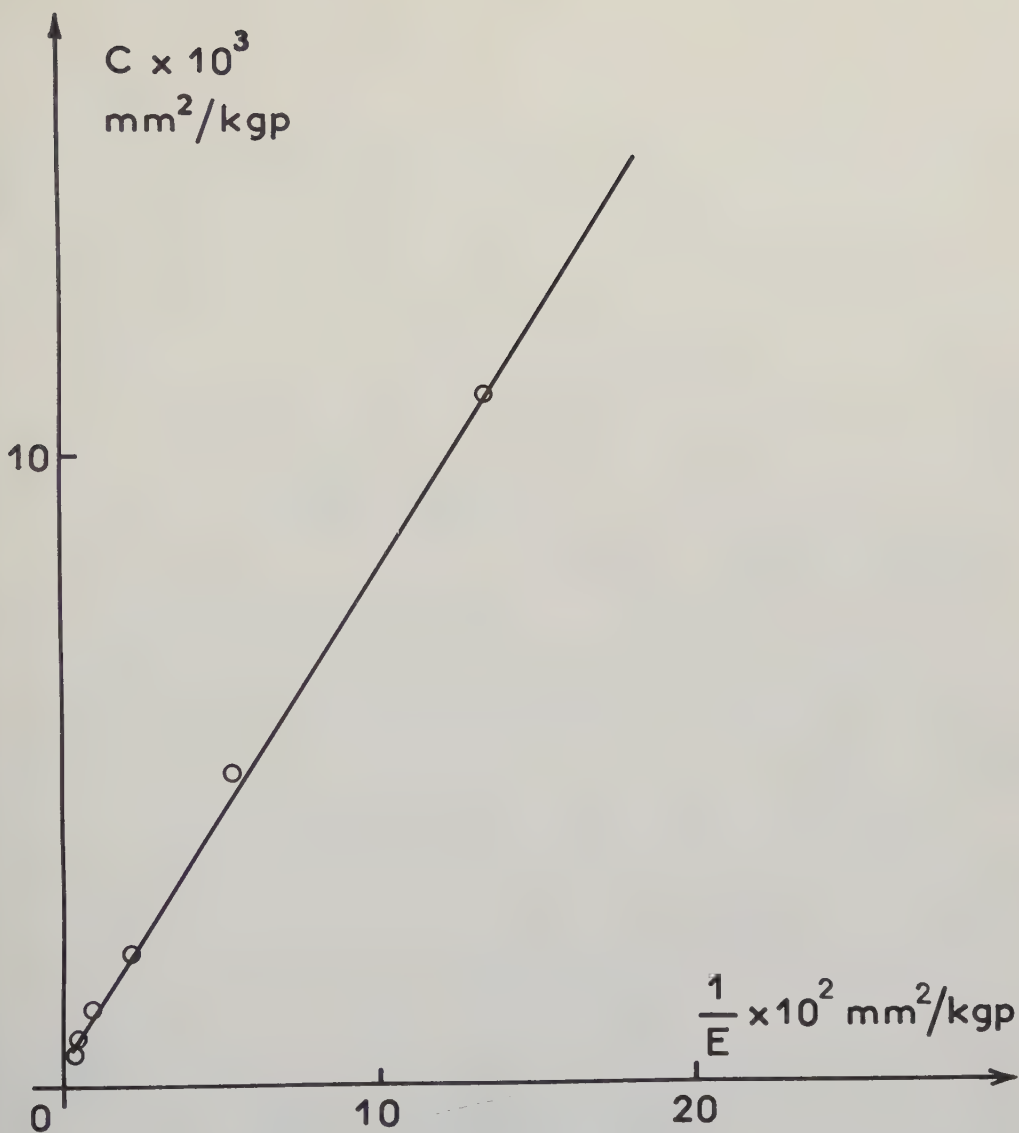
GRAPHE (I - j - 1)
Relatif à l'Araldite D d'après la référence [I-j-1]



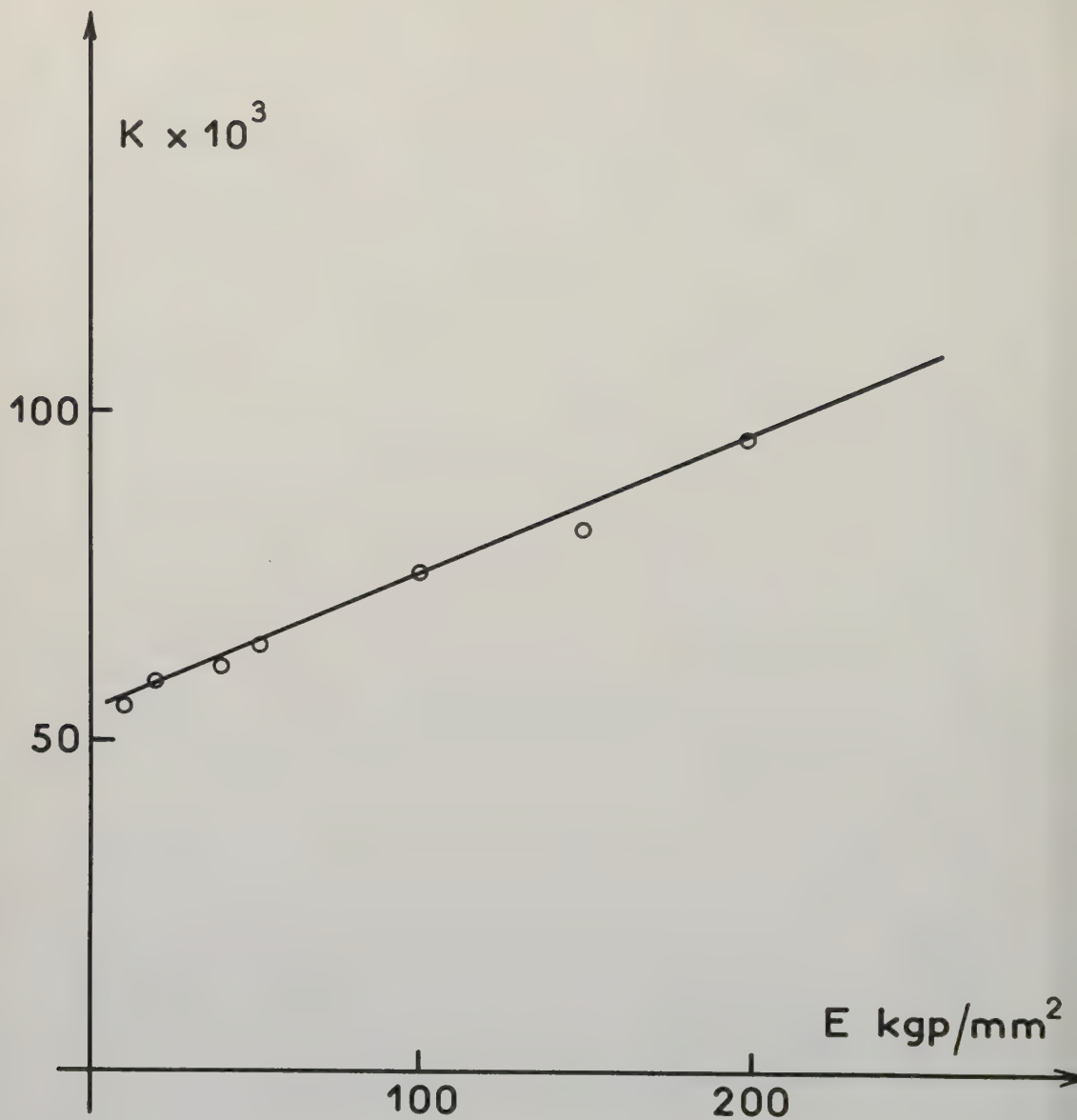
GRAPHE (1 - j - 2)
Relatif à l'Araldite D d'après la référence [1-j-2]



GRAPHE (I - j - 3)
Relatif à l'Araldite D d'après la référence [I-j-3]



GRAPHE (I - j - 4)
 Relatif à l'Araldite D d'après les graphes (I-j-2 et 3)



GRAPHE (I - j - 5)
Relatif à l'Araldite D d'après les graphes (I-j-1 et 3)

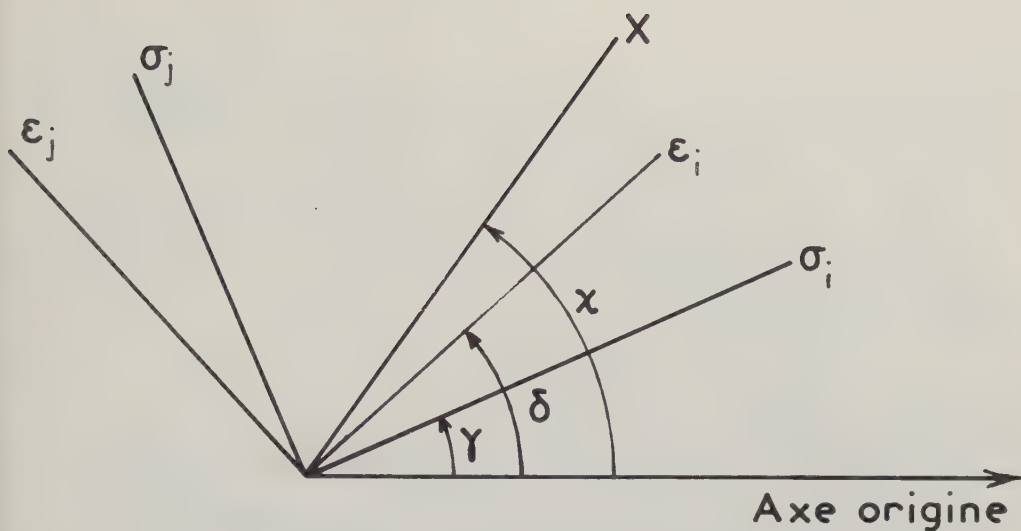


FIGURE (I - k - 1)

ϵ_i, σ_i directions principales secondaires respectivement des tenseurs déformation et contrainte ; X direction principale du tenseur mécanique.

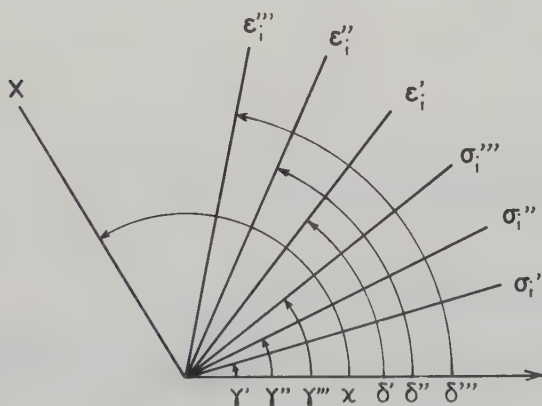


FIGURE (I - l - 1)

ϵ_i, σ_i directions principales secondaires respectivement des tenseurs déformation et contrainte composants ; X direction principale du tenseur mécanique.

En première approximation, on peut admettre que v est indépendant de θ et conserve la valeur moyenne 0,39. Suivant alors les conclusions précédentes, il doit exister une relation linéaire entre C et $\frac{1}{E}$ et corrélativement entre K et E .

Les graphes (I-j-4 et 5) obtenus à partir des graphes (I-j-1, 2 et 3) montrent effectivement que C et $\frac{1}{E}$, de même que K et E peuvent être considérés comme linéairement liés lorsque θ varie, et permettent de déterminer les constantes A et B , par mesure des pentes et ordonnées à l'origine.

A partir du graphe (I-j-4) on obtient :

$$A \simeq 300 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{kgp.} \quad \text{et} \quad B = 55 \cdot 10^{-3}$$

Le graphe (I-j-5) donne :

$$B = 56 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad A = 268 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{kgp.}$$

On constate que l'accord est satisfaisant pour les valeurs de B mais ne l'est pas pour celles de A . Cela s'explique facilement par l'évidente difficulté de préciser l'ordonnée à l'origine sur le graphe (I-j-4). Ce qui nous incite à penser que le graphe (I-j-5) représentant K en fonction de E , permet de calculer A et B d'une façon plus exacte.

On remarquera cependant que ces résultats sont excellents si on considère que les graphes initiaux (I-j-1, 2 et 3) ne représentent que des valeurs moyennes obtenues par divers auteurs sur des araldites désignées sous le nom d' "Araldite D " mais n'ayant certainement pas les mêmes caractéristiques, lesquelles dépendent sensiblement, comme on sait, du pourcentage de durcisseur inclus et des conditions de température lors de la polymérisation. De plus, les auteurs n'ont pas souvent mentionné d'une façon précise, la longueur d'onde de la lumière utilisée pour les mesures de K et C ($\lambda = 546 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$ pour une lampe à vapeur de mercure et $\lambda = 589 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$ pour une lampe à vapeur de sodium). Ceci peut entraîner une imprécision de 7% sur les valeurs de K .

I - k - CAS OU LES TENSEURS CONTRAINTE ET DEFORMATION N'ONT PAS LES MEMES DIRECTIONS PRINCIPALES

Leurs directions principales secondaires sont aussi différentes. Dans le plan de celles-ci (Fig. I-k-1), une direction X sera principale pour le tenseur m_{ij} si :

$$1 \quad \text{tg } 2\chi = \frac{a(\sigma_i - \sigma_j) \sin 2\gamma + b(\epsilon_i - \epsilon_j) \sin 2\delta}{a(\sigma_i - \sigma_j) \cos 2\gamma + b(\epsilon_i - \epsilon_j) \cos 2\delta}$$

Dans ce cas :

$$(m_i - m_j)^2 = \left[a(\sigma_i - \sigma_j) \cos 2\gamma + b(\epsilon_i - \epsilon_j) \cos 2\delta \right]^2 + \left[a(\sigma_i - \sigma_j) \sin 2\gamma + b(\epsilon_i - \epsilon_j) \sin 2\delta \right]^2$$

et

$$(n_i - n_j)^2 = \left[A(\sigma_i - \sigma_j) \cos 2\gamma + B(\epsilon_i - \epsilon_j) \cos 2\delta \right]^2 + \left[A(\sigma_i - \sigma_j) \sin 2\gamma + B(\epsilon_i - \epsilon_j) \sin 2\delta \right]^2$$

La relation (B-C-D) n'est plus linéaire. Elle le redevient cependant lorsque $\gamma = \delta = 0$ évidemment.

I - I - RELATIONS GENERALES

Admettons que le tenseur contrainte puisse être considéré comme une somme telle que :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma''_{ij} + \sigma'''_{ij} + \dots$$

et de même :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij} + \epsilon''_{ij} + \epsilon'''_{ij} + \dots$$

Supposons que ces tenseurs composants aient des directions principales différentes, il en est de même de leurs directions principales secondaires dans un même plan (Fig I-I-1). La condition pour qu'une direction X de ce plan soit principale pour le tenseur m_{ij} s'écrit :

$$\text{tg } 2\chi = \frac{a[(\sigma'_i - \sigma'_j) \sin 2\gamma' + (\sigma''_i - \sigma''_j) \sin 2\gamma'' + \dots] + b[(\epsilon'_i - \epsilon'_j) \sin 2\delta' + (\epsilon''_i - \epsilon''_j) \sin 2\delta'' + \dots]}{a[(\sigma'_i - \sigma'_j) \cos 2\gamma' + (\sigma''_i - \sigma''_j) \cos 2\gamma'' + \dots] + b[(\epsilon'_i - \epsilon'_j) \cos 2\delta' + (\epsilon''_i - \epsilon''_j) \cos 2\delta'' + \dots]}$$

en posant :
$$\text{tg } 2\chi = \frac{M}{N}$$

on peut écrire
$$(m_i - m_j)^2 = M^2 + N^2$$

et
$$(n_i - n_j)^2 = W^2 (M^2 + N^2)$$

soit

$$\begin{aligned}
 (n_i - n_j)^2 = & \left\{ A [(\sigma'_i - \sigma'_j) \sin 2 \gamma' + (\sigma''_i - \sigma''_j) \sin 2 \gamma'' + \dots] \right. \\
 & \left. + B [(\epsilon'_i - \epsilon'_j) \sin 2 \delta' + (\epsilon''_i - \epsilon''_j) \sin 2 \delta'' + \dots] \right\}^2 \\
 & + \left\{ A [(\sigma'_i - \sigma'_j) \cos 2 \gamma' + (\sigma''_i - \sigma''_j) \cos 2 \gamma'' + \dots] \right. \\
 & \left. + B [(\epsilon'_i - \epsilon'_j) \cos 2 \delta' + (\epsilon''_i - \epsilon''_j) \cos 2 \delta''] \right\}^2
 \end{aligned}$$

La relation (B.C.D.) n'est en général pas linéaire sauf si les tenseurs composants sont coaxiaux.

En particulier dans le cas d'un milieu plastique idéal, le tenseur déformation est la somme des tenseurs déformations élastique et plastique [1-1-1] :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^E + \epsilon_{ij}^P$$

Si les deux derniers tenseurs sont coaxiaux la relation (B.C.D.) est linéaire et s'écrit :

$$(n_i - n_j) = K (\epsilon_i - \epsilon_j)^E + B (\epsilon_i - \epsilon_j)^P$$

laquelle s'exprime avec deux constantes caractéristiques K et B dont une au moins doit dépendre de la température. Elle ne contient plus explicitement les composantes du tenseur contrainte et semble indiquer que dans ce cas les composantes des déformations élastique et plastique sont suffisantes pour rendre compte de la biréfringence. De cela, il résulte que pour un corps élastoplastique le graphe de comportement représentant σ en fonction de ϵ est équivalent point par point à un graphe représentant ϵ^E en fonction de ϵ^P (Fig. 1-1-2).

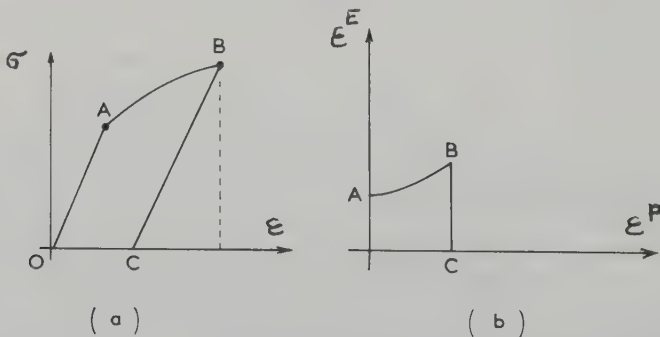


FIGURE (1 - 1 - 2)

Correspondance dans le cas d'un corps élastoplastique.

A partir de considérations déduites d'une théorie de TOUPIN sur les diélectriques [I-1-2] TATSUO TAKUOKA a montré que la relation précédente (6) était valable pour les polymères solides moyennant une hypothèse simple sur les composantes du tenseur diélectrique du milieu [I-1-3].

REMARQUE

Si les variations de température d'une éprouvette biréfringente sollicitée, n'introduisent pas de contraintes thermiques elles n'entraînent qu'une variation de la constante K. Celle-ci peut alors être appréciée par la variation correspondante de la biréfringence et cela dans le domaine élastique et plastique.

Lorsque les tenseurs déformations élastique et plastique ne sont plus coaxiaux on obtient :

$$(n_i - n_j)^2 = [K (\epsilon_i - \epsilon_j)^E \sin 2 \delta_E + B (\epsilon_i - \epsilon_j)^P \sin 2 \delta_P]^2 + [K (\epsilon_i - \epsilon_j)^E \cos 2 \delta_E + B (\epsilon_i - \epsilon_j)^P \cos 2 \delta_P]^2$$

Cette relation n'est plus linéaire, mais comporte encore deux constantes K et B.

Un autre cas particulier est celui d'un corps viscoélastique. S'il s'agit d'un corps de MAXWELL, on a [I-1-4] :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^E + \epsilon_{ij}^V$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E = \sigma_{ij}^V$$

où l'indice supérieur V désigne le tenseur d'origine " visqueuse ".

Si le comportement est celui d'un corps de KELVIN-VOIGT alors [I-1-4] :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^E = \epsilon_{ij}^V$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E + \sigma_{ij}^V$$

En adoptant la méthode générale exposée, on obtiendra dans chaque cas, une relation (B-C-D) linéaire ou non, suivant qu'il y a ou non équiaxialité des tenseurs, mais toujours adaptée à une loi de comportement simple du milieu.

Il est un peu long, mais possible d'établir une relation (B-C-D) plus générale en supposant que l'on puisse représenter le tenseur mécanique par une relation telle que :

$$m_{ij} = c' \sigma'_{ij} + c'' \sigma''_{ij} + \dots + d' \epsilon'_{ij} + d'' \epsilon''_{ij} + \dots$$

où $c', c'', \dots, d', d'', \dots$, sont des constantes.

REMARQUE

Il semble résulter des études précédentes, que la relation (B-C-D) est linéaire tant que les tenseurs composants du tenseur mécanique sont coaxiaux et cette linéarité cesse lorsque cette coaxialité disparaît.

CHAPITRE II

VERIFICATIONS EXPERIMENTALES DANS LES CAS DE COAXIALITE DES TENSEURS CONTRAINTE ET DEFORMATION

II - a – CHOIX ET PRINCIPES DES MESURES

Nous avons vu que lorsqu'il y a coaxialité des tenseurs composant le tenseur mécanique (formule I-h-2), la relation (B-C-D) est linéaire (formule I-j-1) et s'écrit :

$$1 \quad (n_i - n_j) = A (\sigma_i - \sigma_j) + B (\epsilon_i - \epsilon_j)$$

Elle est valable dans un milieu tridimensionnel. Or les mesures de biréfringence dans de tels milieux sont particulièrement délicates [II-a-1] de même que les mesures des contraintes ou des déformations.

Sans restreindre la généralité du problème, on facilite considérablement l'expérimentation en choisissant un milieu d'étude bidimensionnel plan. Il se présentera donc sous forme de plaques d'épaisseur constante, sollicitées dans leur plan.

Loin des points d'application des charges, on admettra que les tenseurs des indices, des contraintes et des déformations restent constants en tous points du milieu situés sur une même normale au plan moyen. Celle-ci est alors une direction principale commune à ces tenseurs.

Enfin, on dirigera la lumière incidente de telle sorte que le plan d'onde soit parallèle au plan de la plaque (incidence normale ou quasi-normale). Les directions principales secondaires dans ce plan d'onde seront aussi les directions principales des tenseurs. La formule (1) peut alors s'écrire :

$$2 \quad (n_1 - n_2) = A (\sigma_1 - \sigma_2) + B (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

où l'on convient que $(n_1 - n_2)$, $(\sigma_1 - \sigma_2)$ et $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ représentent respectivement, les différences des indices principaux, des contraintes principales et des déformations principales, normaux à la direction principale commune aux tenseurs.

Pour vérifier la formule (2) on s'arrange pour maintenir constante une des différences du second membre, et on mesure la biréfringence $(n_1 - n_2)$ pour différentes valeurs de l'autre. Il est évident que des variations de cette autre différence ne peuvent apparaître que sous l'action de la température qui fait évoluer le module d'Young, ou celle du temps qui met en relief les phénomènes de " viscosité ".

Dans tous les cas, il nous faut disposer d'une enceinte thermique contrôlée dans laquelle on enferme le matériau constituant le milieu sur lequel on veut effectuer la vérification de la loi. Cette enceinte permettra de faire des mesures instantanées à température variable ou des mesures à température constante mais étalées dans le temps. Elle est principalement conditionnée par le choix du matériau d'essai.

II - b – MATERIAU D'ESSAI

Un matériau facilement biréfringent, homogène et isotrope, de qualité régulière et constante, disponible en quantité suffisante, est vendu dans le commerce. Ce sont des plaques en araldite, de format carré de 30 centimètres de côté et d'épaisseur constante à 1% près, entre 1 et 15 millimètres.

L'araldite constituant les plaques que nous avons utilisées, présente à la température ambiante les caractéristiques suivantes :

Module d'Young $E = 320 \text{ Kgp/mm}^2$

Coefficient du Poisson $\nu = 0,37$

Contrainte à la limite élastique $\sigma_e = 3,5 \text{ Kgp/mm}^2$

Contrainte à la rupture $\sigma_r = 6,8 \text{ Kgp/mm}^2$

Déformation à la limite élastique $\epsilon_e = 1,1 \cdot 10^{-2}$

Coefficient de dilatation linéaire $\alpha = 97 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

Constantes photo-mécaniques :

$$K = 89 \cdot 10^{-3}$$

$$C = \frac{K(1 + \nu)}{E} = 38 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^2 / \text{Kgp}$$

Les valeurs numériques sont généralement communiquées par le fabricant, Nous les avons cependant contrôlées suivant les méthodes classiques de mesures [I-a-4]. On remarquera que le module d'Young est faible, il ne sera donc pas nécessaire d'appliquer de grands efforts pour déformer. Les constantes photomécaniques indiquent que la biréfringence apparaîtra facilement, beaucoup plus facilement que dans le plexiglas. Par ailleurs, la température critique de ramolissement [II-b-1] est de 90°C environ. Le domaine d'exploration en température sera donc peu étendu et facilement réalisable en laboratoire. Ce sont les principales raisons pour lesquelles nous avons choisi ce matériau pour vérifier les lois (B-C-D) proposées.

II - c – ENCEINTE THERMIQUE

Elle a la forme d'un manchon parallélépipédique de 25 centimètres de hauteur et de section carrée de 10 centimètres de côté (Fig. II-c-1). Deux faces longitudinales opposées sont vitrées pour permettre le passage de la lumière. Les glaces les constituant sont initialement isotropes et le demeurent, malgré l'élévation de température, car on a

prévu leur libre dilatation. Elles n'introduisent donc aucune biréfringence parasite due aux contraintes thermiques et cela est facilement contrôlable en plaçant l'enceinte entre polarisateurs croisés. L'épaisseur de ces glaces est de 10 millimètres ce qui assure un isolement thermique suffisant.

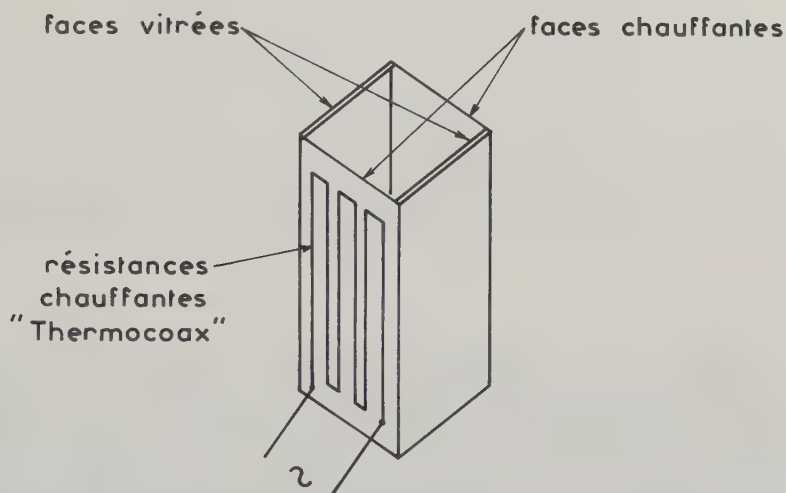


FIGURE (II - c - 1)
Schéma de l'enceinte thermique.

Les deux autres faces longitudinales sont garnies extérieurement d'isolant thermique en laine de verre et intérieurement de résistances chauffantes gainées d'inox type thermocoax. La puissance calorifique maximum qu'elles peuvent dissiper est de 1000 Watts. Elles sont alimentées à partir d'un alternostat par l'intermédiaire d'un boîtier de régulation par tout ou rien, commandé par un thermomètre à contact réglable, dont l'extrémité de mesure est placée le plus près possible du centre de l'enceinte (Fig. II-c-2). La régulation est de l'ordre de 0,1 à 0,2°C.

Les faces transversales sont prévues pour le passage des éprouvettes et des pièces de fixation transmettant les sollicitations. (Fig. II-c-3). On obstrue convenablement leur section restante pour éviter les courants d'air et les déperditions de chaleur, préjudiciables à l'état de température uniforme que l'on cherche à réaliser à l'intérieur de l'enceinte.

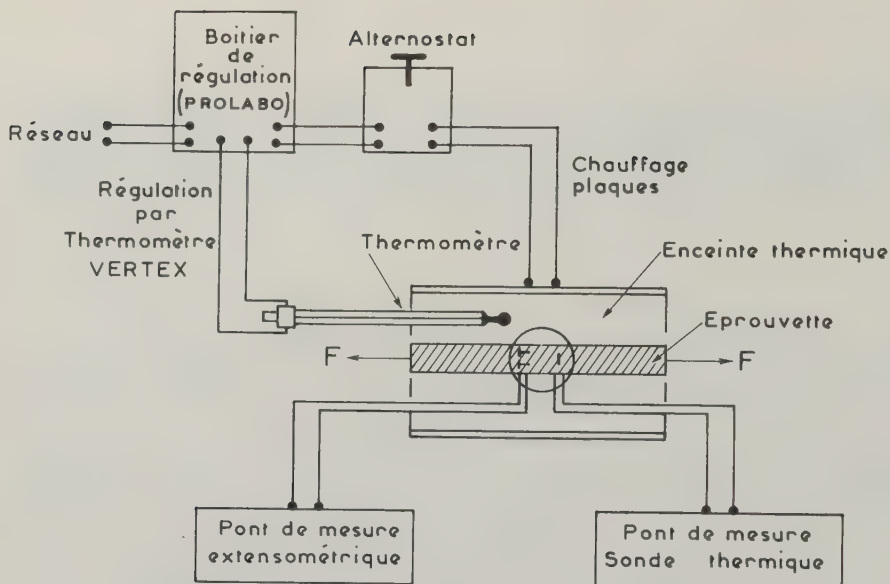


FIGURE (II - c - 2)
Schéma de l'ensemble comprenant l'enceinte thermique, l'éprouvette, et les circuits de mesure et de régulation.

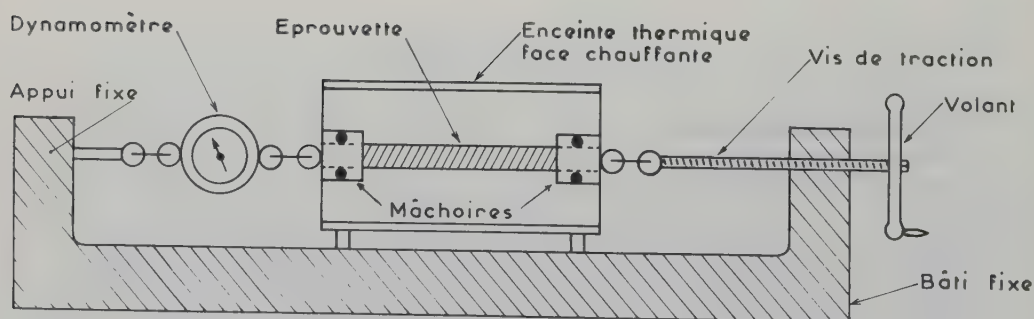
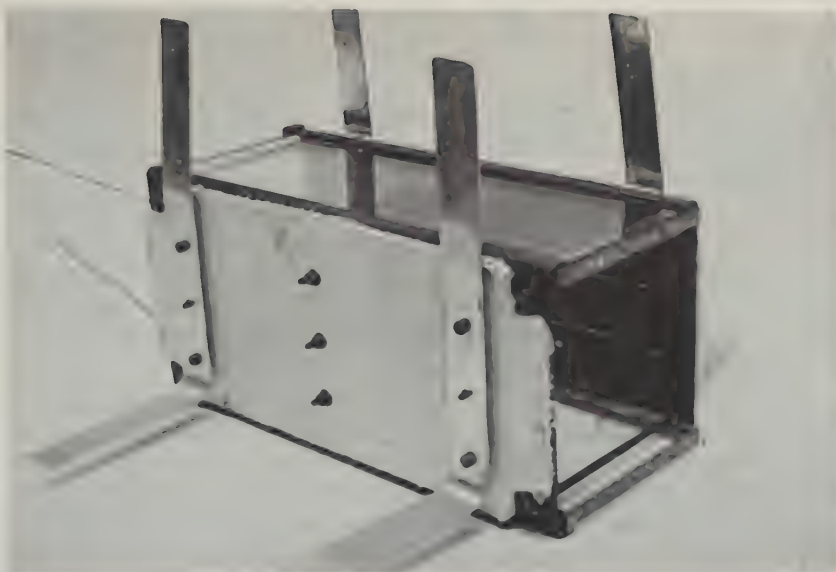


FIGURE (II - c - 3)
Schéma du dispositif de traction avec enceinte thermique.



PLANCHE

Enceinte thermique et appareil de traction

Lorsque celle-ci est vide, convenablement obstruée, et régulée à une température de 100°C environ en son centre, les mesures par thermocouples de la température en différents points montrent que le champ thermique n'y est pas rigoureusement uniforme. On a constaté en effet des écarts maximum de 2,5°C environ. Plus précisément, du centre de l'enceinte, la température croît de 1°C en moyenne jusqu'au centre d'une face chauffante, elle décroît de 1°C environ jusqu'au centre d'une face vitrée et de 1,5°C jusqu'au centre d'une face transversale. Nous admettrons que cette répartition des températures reste encore valable lorsqu'une éprouvette d'essai est glissée à l'intérieur de l'enceinte. Il n'en demeure pas moins vrai qu'un champ non uniforme de température peut engendrer dans l'éprouvette des contraintes d'origine thermique qui vont se superposer aux contraintes mécaniques imposées [II-c-1]. Mais cet effet est négligeable. D'abord parce que les contraintes n'interviennent dans la formule (II-a-1) à vérifier, que par leur différence dans deux directions rectangulaires. Ensuite, parce que le gradient de température qui peut s'établir sur l'éprouvette reste faible et qu'alors les composantes du tenseurs d'origine thermique :

$$\sigma_{ij}^{\theta} = \frac{E}{(1 - 2\nu)} \alpha (\Delta \theta) \delta_{ij}$$

$\Delta \theta$: variation de température

δ_{ij} : symbole de Kröneckner

sont petites devant celles du tenseur mécanique que l'on peut appliquer. Enfin, le champ thermique a sensiblement un axe de symétrie confondu avec l'axe de symétrie longitudinal de l'enceinte. Si donc on donne à l'éprouvette d'essai un axe de symétrie et qu'on la dispose pour qu'il se confonde avec celui de l'enceinte, on est assuré que les directions principales des contraintes résultantes seront bien celles des contraintes mécaniques appliquées.

La forme de l'éprouvette, comme les sollicitations qu'on doit lui imposer, devront être choisies en conséquence.

II - d – LES EPROUVETTES - LES SOLLICITATIONS APPLIQUEES - CALCULS DES CONTRAINTES

Les mesures ponctuelles sont quasiment impossibles. Les éprouvettes sollicitées doivent comporter de larges champs de mesures uniformes, dans lesquels l'état des contraintes élastiques ou plastiques se calcule aisément à partir des charges appliquées. La traction simple uniforme remplit ces conditions. Découpées dans les plaques d'araldite, les éprouvettes ont une épaisseur de 3 mm en général et un format rectangulaire long, 20 X 300 mm environ.

L'une d'elle, disposée symétriquement dans l'enceinte, est saisie à ses extrémités par des machoires assez éloignées l'une de l'autre pour ne pas perturber la zone de mesure située au voisinage de son centre géométrique (Fig. II-c-3). Par l'intermédiaire de ces machoires, on exerce un effort de traction sans flexion ni torsion grâce à des articulations convenables et à un serrage correct des éprouvettes.

Un contrôle optique selon les méthodes mêmes de la photoélasticimétrie permet d'ailleurs de vérifier très précisément la qualité et le maintien de cet état de traction simple, en plaçant l'éprouvette entre polariseurs croisés. On sait, en effet qu'à une zone uniformément éclairée correspond en général un champ de contraintes ou de déformations uniforme. L'apparition de franges d'interférence indique au contraire une absence d'uniformité de ces champs.

En particulier, on repère ainsi tout glissement dissymétrique de l'éprouvette dans ses mors et on vérifie, comme le montrent d'ailleurs les calculs, que la flexion naturelle de l'éprouvette placée horizontalement et soumise à son propre poids n'introduit que des contraintes ou des déformations entièrement négligeables devant celles qui résultent l'effort de traction exercé.

Cet effort est mesuré à l'aide d'un anneau dynamométrique intercalé entre une machoire et le dispositif d'effort (poids, levier, vérin à vis). Suivant le cas, la gamme de mesures de l'anneau utilisé est de 100, 200 ou 500 kgp avec une sensibilité respective de 150, 200 et 800 gp, soit une précision de mesure de 1,5‰.

Sur toute section plane de la zone médiane de l'éprouvette l'état des contraintes est uniforme d'après le principe de SAINT-VENANT. Si F est l'effort de traction mesuré, sur une section droite, seule la contrainte normale est différente de zéro et vaut $\sigma = F/A$ où A est l'aire de cette section.

II - e – MESURE DE LA BIREFRINGENCE

Les théories de l'optique indiquent que la biréfringence est alors donnée par [II-e-1] :

$$(n_1 - n_2) = \frac{\delta_m}{e} = \frac{k\lambda}{e}$$

avec

δ_m différence de marche ou retard relatif entre les ondes polarisées dans les directions des indices n_1 et n_2 .

e épaisseur traversée par la lumière, liée à l'épaisseur de la plaque.

λ largeur d'onde de la lumière utilisée.

k ordre de frange entier ou fractionnaire.

Connaissant λ et e , on mesure k . La méthode simple de compensation de TARDY [II-e-2] consiste à se servir de l'analyseur du polariscopes comme compensateur en le faisant tourner dans son plan. Cette méthode, comme celle qui consiste à faire tourner de la même façon une lame quart-d'onde [II-e-3], est sensible à la longueur d'onde utilisée. Or une source n'est jamais rigoureusement monochromatique et la longueur d'onde moyenne est rarement celle qui est caractéristique des lames quart-d'onde [II-e-4]. En ce qui concerne notre matériel :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ filtre monochromateur} &= (565 \pm 2,5) \cdot 10^{-6} \text{ mm} \\ \lambda_q \text{ Quart-d'onde} &= (560 \pm 2,5) \cdot 10^{-6} \text{ mm}\end{aligned}$$

Cela se traduit par une erreur sur k au plus égale à :

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\lambda - \lambda_q}{\lambda} = 0,9 \%$$

avec

Δk , Variation de k .

C'est la raison pour laquelle nous avons préféré ensuite utiliser un compensateur du type BABINET-SOLEIL [II-e-1 et 2] constitué par des coins de quartz convenablement taillés et pouvant se déplacer micrométriquement l'un par rapport à l'autre. Il permet d'introduire un retard optique variable qui peut compenser exactement le retard sur l'éprouvette, C'est une méthode de zéro indépendante de λ . Le compensateur que nous avons utilisé est un modèle à indication numérique. Sa plage de rattrapage de ± 3 franges. La sensibilité d'une mesure est meilleure que 10^{-2} franges.

Remarque sur le réglage en incidence du rayon lumineux :

Ce réglage n'est pas critique, car si le rayon incident fait avec la normale à la plaque un angle i différent de zéro, cela introduit dans la mesure de la biréfringence un facteur $\cos^2 i$, soit une erreur de $3 \cdot 10^{-3}$ pour $i = 5^\circ$. Le réglage optique de l'incidence à 5 degrés près s'effectue facilement en considérant l'image de la source lumineuse sur la face plane de l'éprouvette formant miroir.

II - f - MESURES DES DEFORMATIONS

Elles se font suivant la technique des jauges de contrainte que l'on trouve largement exposée dans les manuels spécialisés [II-f-1]. Nous avons utilisé des jauges spéciales haute élongation (12 à 18%) et large champ de température (- 80°C à + 100°C), collées avec un adhésif adapté à ces performances. Plus précisément, il s'agit de rosettes bijauges à 90 degrés vendues par lot d'éléments identiques.

Caractéristiques d'une jauge :

- Résistance électrique : $R = 120 \pm 0,2 \ \Omega$
- Dimensions grille : $6,4 \times 3,2 \text{ mm}$
- Coefficient longitudinal : $K_L = 2,03 \pm 0,5 \cdot 10^{-2}$
- Coefficient transversal : $K_T = 10^{-3} K_L$

D'après le constructeur le coefficient de jauge K_L demeure constant entre 0 et 60°C puis croît de 0,5% environ entre 70 et 100°C.

Par raison de symétrie les directions principales des déformations sont aussi celles des contraintes principales. Dans la zone médiane, compte tenu de ce qui a été dit dans les paragraphes précédents, celles-ci sont parallèles aux axes géométriques de l'éprouvette. Avec une aiguille, on trace finement les axes géométriques longitudinal et transversal de chacune des faces sur lesquelles on colle deux rosettes. On les dispose de telle sorte que deux des grilles soient symétriques de l'axe longitudinal et distantes de 10 mm environ, tandis que les deux autres grilles sont alignées sur l'axe transversal (Fig. II-f-1). Le support des jauges étant transparent le contrôle des distances et des alignements peut se faire sous microscope à faible grossissement. Il doit s'effectuer avant durcissement de la colle. Précision sur les distances 10^{-2} mm . Précision sur les angles 1 degré.

Il y a donc quatre jauges avec lesquelles on constitue un pont complet dont la tension de déséquilibre est [II-f-2] :

$$\Delta V = \frac{V_o}{4} \left[\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R'_1}{R'_1} - \frac{\Delta R'_2}{R'_2} \right]$$

où V_o est la tension d'alimentation du pont et R et ΔR représentent respectivement la résistance initiale de chaque jauge et sa variation après déformation (Fig. II-f-2). On sait que :

$$\frac{\Delta R}{R} = K_L \frac{\Delta L}{L} = K_L \epsilon$$

où K_L : coefficient longitudinal de jauge.
 ϵ : déformation dans le sens longitudinal.

Un tel montage permet de mesurer directement le double de la différence des déformations cherchées soit $2(\epsilon_1 - \epsilon_2)$.

La position symétrique des jauges compense automatiquement les légères flexions qui subsisteraient malgré les précautions prises, elle élimine ou rend négligeable l'effet des déformations dues à la dilatation thermique de l'éprouvette, et l'influence des variations de capacité électrique des circuits résultant de la présence d'une porteuse alternative dans l'alimentation du pont.

Mais les effets de la température sur le facteur de jauge K_L ne sont pas éliminés. Il faut en tenir compte le cas échéant à partir des courbes expérimentales établies par le constructeur et fournies avec chaque lot de jauges. Cette correction est très faible pour les jauges employées.

Le constructeur affirme qu'en faisant subir au collage un traitement thermique de 6 à 8 heures à 25°C , le fluage relatif de la colle ainsi durcie est de l'ordre de 0,5 à 1% en 2 heures à la température de 80°C il est plus faible aux températures inférieures et si la durée des mesures n'est pas très élevées, il peut être considéré comme négligeable d'après ces résultats.

Outre le fluage de la colle, il y a celui du support et celui des fils métalliques constituant la jauge. Ces fluages sont cumulatifs. Cependant du point de vue des mesures, il faut remarquer qu'ils se traduisent toujours par une diminution de la valeur absolue de la déformation à mesurer sur l'éprouvette. La mesure différentielle des déformations atténue par conséquent l'influence du fluage.

Dans le cas où la zéro du pont de mesure extensométrique est particulièrement stable, on peut faire une mesure du fluage total colle-support-fil de jauge. Pour cela, on donne à l'éprouvette sur laquelle on a fixé la jauge, une déformation que l'on s'arrange pour maintenir constante. Le contrôle doit se faire par un procédé autre que celui des jauges, par exemple observation sous microscope, d'un élément d'éprouvette avec visée micrométrique. La mesure au pont de déformation de la jauge en fonction du temps donne le fluage résultant. Les ponts que nous avons utilisés ont une stabilité de zéro suffisante ($\frac{\Delta R}{R} \leq 10^{-5}$, pendant 1 heure, après 1/2 heure de chauffage). Les mesures de fluage effectuées donnent des valeurs très dispersées et toujours supérieures à celles indiquées précédemment. Il semble qu'un fluage relatif moyen de 1 à 3% durant la première heure et pour une température de 60°C soit plus proche de la vérité.

REMARQUES

Pour éviter tout échauffement ponctuel de l'éprouvette à l'endroit du collage des jauges, nous avons réduit autant que possible le courant d'alimentation de celles-ci à moins de

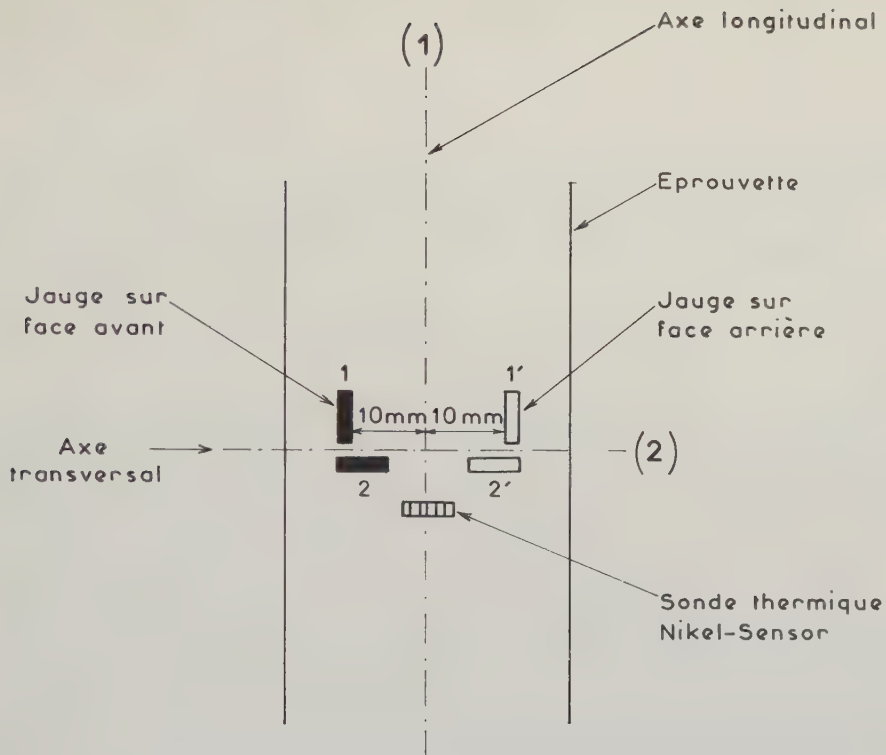


FIGURE (II - f - 1)
Schéma de disposition des jauges de contrainte
sur l'éprouvette d'Araldite

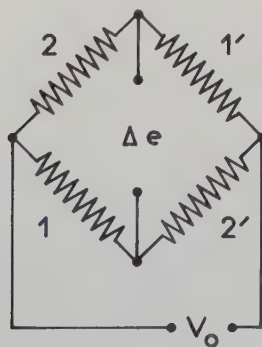
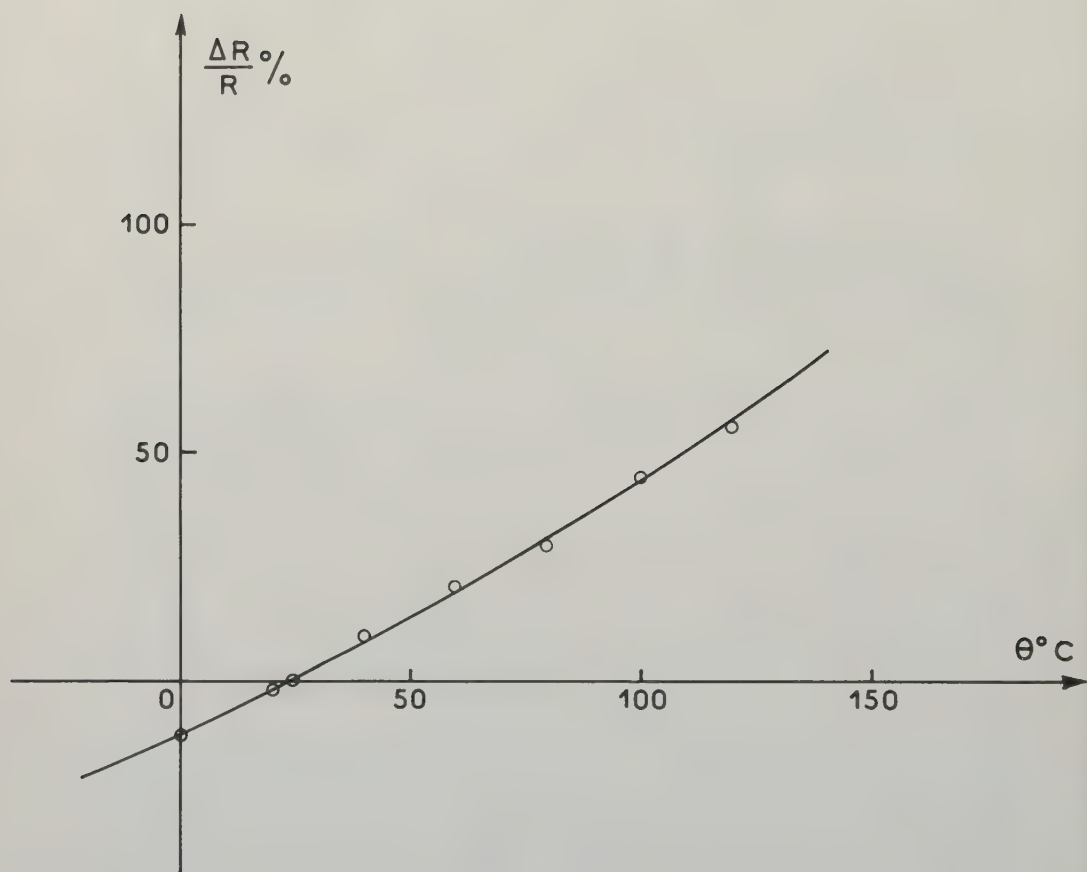


FIGURE (II - f - 2)
Position des jauges de contrainte montées en pont complet.



GRAPHE (II - g - 1)
Evolution de la résistance électrique relative d'une
sonde thermique (d'après le constructeur)

100 milliampères. Cela d'ailleurs diminue considérablement les effets parasites d'anémomètre. Par ailleurs, on réduit les causes d'erreur résultant de la résistance des fils de liaison jauge-pont en prenant des fils conducteurs de longueur égale et courte (1,5 m) adaptés selon le constructeur au métal de la jauge et à la température d'utilisation.

II - g – MESURE DE LA TEMPERATURE DE L'ÉPROUVETTE

Nous avons vu au paragraphe (I-j) combien la température pouvait modifier les caractéristiques E , ν , K et C des araldites. Entre 20 et 50°C par exemple E peut varier de 40% et K de 20%, Il est donc nécessaire de connaître avec le maximum de précision la température de l'éprouvette dans la zone de mesure. Or, seule la température de surface est ici accessible et nous admettons que la température interne lui est égale.

Pour faire ces mesures, nous avons employé des sondes thermiques en nickel [II-g-1]. Elles se présentent comme des jauges de déformation, avec une grille fixée sur un support en résine époxy que l'on colle de la même façon à l'endroit de l'éprouvette où l'on désire connaître la température.

A 24°C la résistance nominale des grille est de 50 Ω . L'alliage de Nickel la constituant la rend particulièrement sensible à la température alors que l'effet de la déformation est pratiquement négligeable. Une courbe d'étalonnage fournie par le constructeur établit la liaison entre la température et l'augmentation en pourcentage de la valeur de la résistance nominale (Graphe II-g-1). Un pont de mesure classique permet ainsi par l'intermédiaire de la mesure de la résistance, de connaître la température de la jauge avec une sensibilité largement suffisante de 10⁻²°C au moins. La précision des mesures de température peut être de même ordre de grandeur si on connaît la résistance de grille pour une température exactement repérée.

En général, nous avons collé la sonde de température symétriquement sur l'axe longitudinal d'une face de l'éprouvette, avec ses fils résistants parallèles à l'axe transversal (Fig. II-f-1) pour diminuer autant que possible les variations de résistance parasite dues à la déformation. Sa distance à cet axe est de 15 mm environ, ce qui laisse au centre géométrique de l'éprouvette une zone non recouverte pour pouvoir faire les mesures de biréfringence. On n'a donc pas une mesure de température au point précis où on mesure la biréfringence. En fait, l'écart de température entre le point de mesure et le point d'observation est très faible (inférieur à 2 . 10⁻¹°C) et on peut montrer que cet écart a un effet négligeable sur les mesures qui nous préoccupent.

II - h – EXPERIENCES A CONTRAINTE CONSTANTE ET TEMPERATURE VARIABLE

On prépare plusieurs éprouvettes identiques 25×250 mm taillées dans une même plaque d'alraldite isotrope, d'épaisseur 3 mm. On les équipe des jauges nécessaires comme il vient d'être dit. Après contrôle de la bonne position de ces jauges, on soumet le collage à un traitement thermique pendant 4 heures dans une étuve à 30°C .

Une éprouvette est ensuite placée dans l'enceinte thermique et fixée correctement au dispositif de traction selon la méthode décrite. On la soumet à un effort F de traction longitudinale simple. F est maintenu constant en agissant manuellement sur le vérin de traction.

Dans le plan de la plaque les contraintes principales sont :

$$\sigma_1 = F/A \quad , \quad \sigma_2 = 0$$

respectivement dans les directions marquées (1) et (2) sur la figure (II-f-1). D'où $(\sigma_1 - \sigma_2) = F/A$. La contrainte principale σ_3 normale à la plaque est nulle.

On note alors la température θ de l'éprouvette obtenue à partir de la sonde thermique et la déformation différentielle $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ fournie par les indications du pont de mesure extensométrique lié aux jauges de déformation. On mesure enfin la biréfringence au centre. Puis on fait évoluer lentement la température de l'enceinte thermique, et on la stabilise grâce au régulateur. Lorsque l'indication de la sonde thermique est stable, ce qui se produit en général au bout de 10 minutes de régulation environ, on rétablit la traction à la valeur F grâce au vérin et on note à nouveau la température θ , la déformation différentielle et la biréfringence correspondante.

On fait évoluer la température de quelques degrés et on recommence une série de mesures. Au delà d'une certaine température l'éprouvette se déforme considérablement. Pour pouvoir faire facilement des mesures, il est nécessaire de décharger l'éprouvette durant tout le temps de stabilisation de la température et de rétablir la charge F qu'on s'est imposé, seulement au moment des mesures de θ , $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ et $(n_1 - n_2)$.

Lorsque l'éprouvette est trop déformée ou rompue, on la remplace par une autre parmi les éprouvettes préparées et on recommence à partir de la température ambiante une nouvelle série d'expériences analogues, mais avec une charge $2F$, puis $3F$ etc ...

En fait, pour chacun des efforts imposés, nous avons expérimenté sur deux éprouvettes au moins et quelques fois trois pour contrôle. Ce sont les résultats de ces mesures que nous avons groupés dans le tableau (II-h-1). Le graphe (II-h-1) représente les valeurs variations de k/e en fonction de $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$. (Voir formule II-e-1). La relation théorique s'écrit :

$$1 \quad \frac{k}{e} = \frac{A}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{B}{\lambda} (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

Dans le domaine étudié, on constate bien que pour chaque valeur fixée de $(\sigma_1 - \sigma_2)$, k/e est une fonction linéaire de la différence $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$. Les droites obtenues sont parallèles entre elles, leurs distances sont bien proportionnelles à la différence des valeurs correspondantes de $(\sigma_1 - \sigma_2)$.

La pente commune de ces droites, et leur ordonnée à l'origine donnent respectivement :

$$\begin{aligned} B/\lambda &= 98 \text{ mm}^{-1} & \text{et} \\ A/\lambda &= 0,20 \text{ mm/kgp} \end{aligned}$$

Sachant que : $\lambda = 565 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$, il est facile de calculer A et B.

REMARQUES

Nous avons fait quelques expériences sur des éprouvettes de même nature mais d'épaisseur différente, nous avons aussi mesuré la biréfringence par transmission et par réflexion, dans tous les cas nous avons constaté que le point figuratif de l'évolution de k/e en fonction de $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ donnée, se situait toujours sur une même droite confondue avec celle obtenue dans les essais précédents pour la même valeur de $(\sigma_1 - \sigma_2)$, la lumière utilisée restant la même. Nous devons aussi signaler que les résultats ne sont pas changés si l'on applique la charge F en quelques dixièmes de secondes ou par paliers successifs de 5 kgp environ à 5 minutes d'intervalle. On relève cependant quelques écarts lorsqu'on approche de très grandes déformations. Dans ce cas, il semble qu'il faille imputer ces écarts à la durée non négligeable des mesures pendant lesquelles les déformations varient encore.

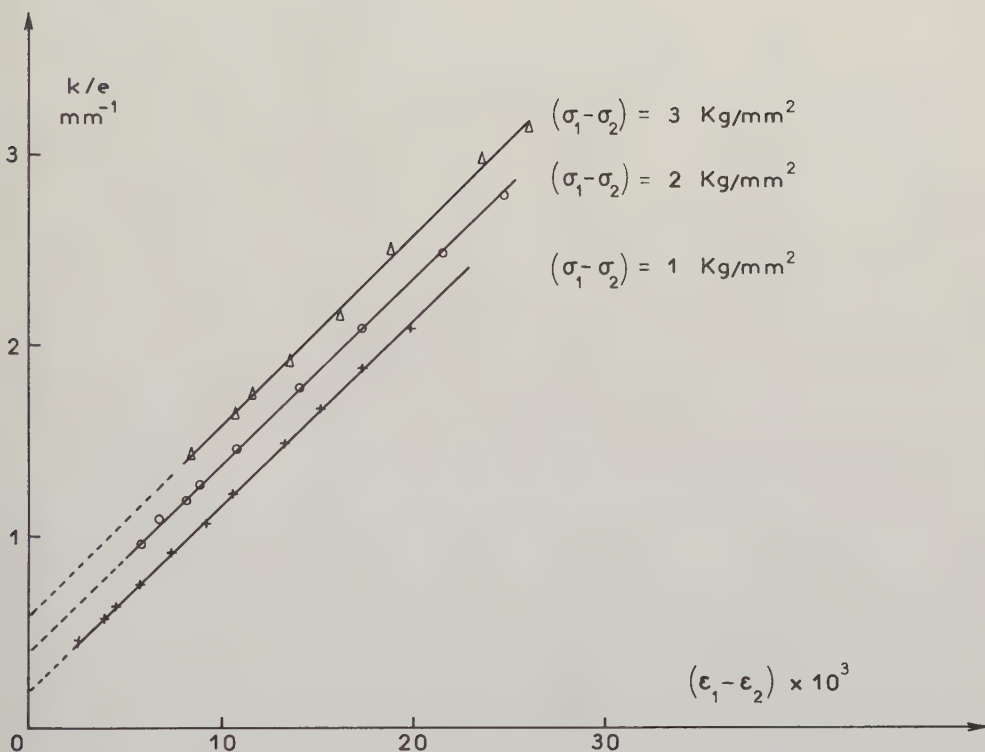
Pour obtenir de la relation (II-h-1) une représentation linéaire unique, il est commode de tracer les variations de :

$$\frac{k}{e(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \quad \text{en fonction de} \quad \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}$$

A partir du tableau (II-h-1) on déduit le tableau (II-h-2) dont les valeurs sont représentées sur le graphe (II-h-2). Il est visible que les points se répartissent pratiquement sur une droite unique d'ordonnée à l'origine A/λ et de pente B/λ ayant évidemment les valeurs données précédemment. La relation (II-h-1) est donc bien indépendante de la température comme on pouvait le constater déjà sur le graphe (II-h-1). On remarque que le rapport $(\sigma_1 - \sigma_2) / (\epsilon_1 - \epsilon_2)$ tend rapidement vers zéro lorsque la température augmente pour se rapprocher de la température critique de ramollissement.

TABLEAU (II - h - 1)

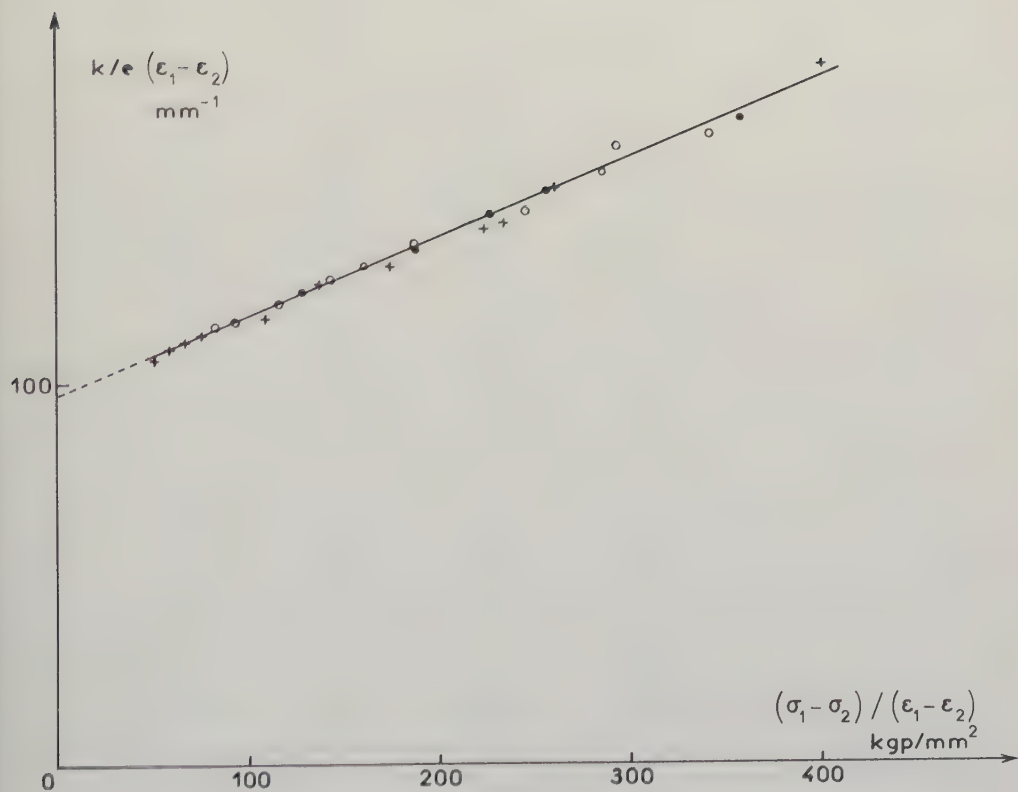
$(\sigma_1 - \sigma_2)$ kgp/mm ²	Θ °C	$(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ $\times 10^3$	k/e mm ⁻¹
1	12,5	2,5	0,46
	15,6	3,9	0,59
	18,1	4,3	0,61
	19,6	4,5	0,63
	23,0	5,8	0,76
	24,8	7,4	0,93
	29,6	9,2	1,08
	32,7	10,6	1,24
	36,1	13,2	1,50
	37,2	15,1	1,68
	39,5	17,4	1,90
	41	19,9	2,12
2	12,9	5,9	0,97
	14,5	6,8	1,10
	17,3	8,2	1,19
	19,8	8,9	1,28
	22,4	10,8	1,47
	26,5	14,1	1,79
	30,2	17,3	2,10
	34,2	21,5	2,51
	36,1	24,5	2,80
3	12,7	8,4	1,43
	15,3	10,6	1,64
	17,2	11,7	1,75
	20,1	13,5	1,93
	22,4	16,1	2,18
	25,2	18,7	2,46
	28,0	23,8	2,95
	30,2	26,0	3,16



GRAPHE (II - h - 1)
 Résultats expérimentaux d'après le tableau (II-h-1)

TABLEAU (II - h - 2)

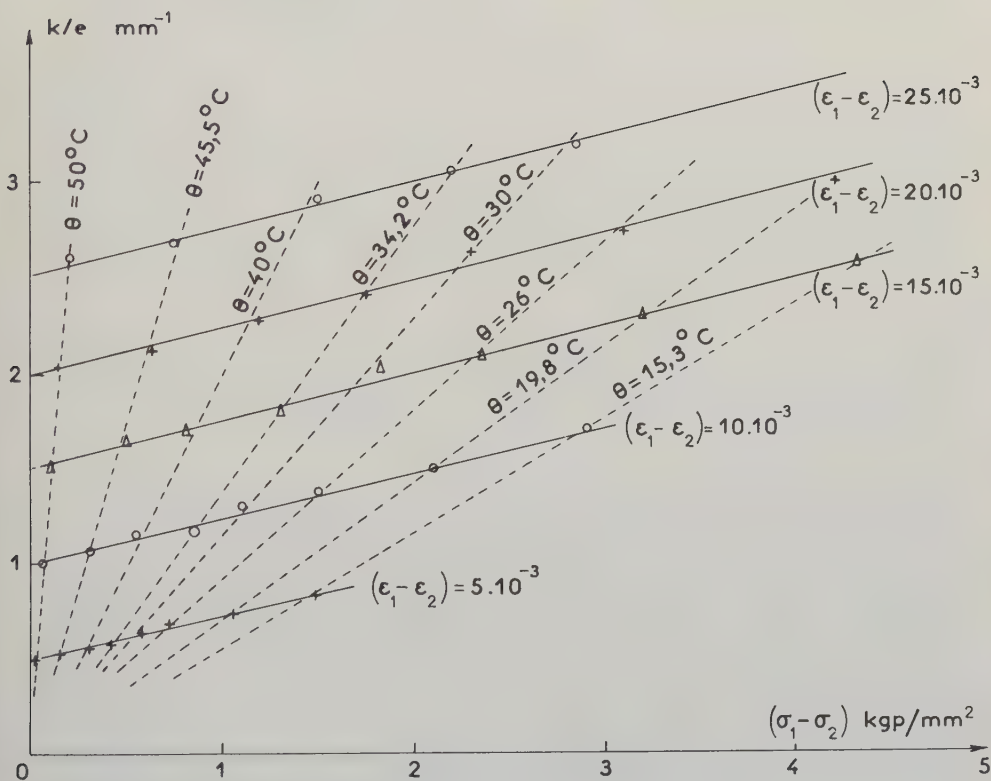
θ	$k / e(\epsilon_1 - \epsilon_2)$	$(\sigma_1 - \sigma_2) / (\epsilon_1 - \epsilon_2)$
$^{\circ}\text{C}$	mm^{-1}	kgp/mm^2
12,5	184	400
15,6	151	258
18,1	142	232
19,6	140	222
23,0	131	173
24,8	126	135
29,6	117	109
32,7	117	94
36,1	113	76
37,2	111	66
39,5	109	58
41	106	50
12,9	165	430
14,5	162	292
17,3	145	244
19,8	144	226
22,4	136	186
26,5	127	142
30,2	121	115
34,2	116	93
36,1	114	81,5
12,7	169	357
15,3	156	283
17,2	150	256
20,1	143	222
22,4	135	186
25,2	131	160
28,0	124	126
30,2	121	115



GRAPHE (II - h - 2)
 Résultats expérimentaux d'après les tableaux (II-h-1 et 2)

TABLEAU (II - i - 1)

θ °C	$\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{x 10^3}$	5	10	15	20	25
15,3	$k/e \quad mm^{-1}$	0,83	1,70	2,58	3,15	4,05
	$(\sigma_1 - \sigma_2) \text{ kgp/mm}^2$	1,48	2,90	4,32	5,72	7,0
19,8	k/e	0,74	1,50	2,30	3,02	3,70
	$(\sigma_1 - \sigma_2)$	1,05	2,10	3,20	4,22	5,20
26	k/e	0,68	1,38	2,08	2,75	3,52
	$(\sigma_1 - \sigma_2)$	0,72	1,50	2,35	3,10	4,03
30	k/e	0,64	1,30	2,02	2,63	3,18
	$(\sigma_1 - \sigma_2)$	0,58	1,10	1,82	2,30	2,85
34,2	k/e	0,57	1,17	1,80	2,41	3,05
	$(\sigma_1 - \sigma_2)$	0,42	0,85	1,30	1,76	2,20
40	k/e	0,55	1,15	1,70	2,28	2,90
	$(\sigma_1 - \sigma_2)$	0,30	0,55	0,91	1,20	1,50
45,5	k/e	0,52	1,06	1,65	2,15	2,68
	$(\sigma_1 - \sigma_2)$	0,15	0,31	0,50	0,63	0,75
50	k/e	0,50	1,00	1,50	2,04	2,60
	$(\sigma_1 - \sigma_2)$	0,03	0,06	0,09	0,14	0,21



GRAPHE (II - i - 1)
 Résultats expérimentaux d'après le tableau (II-i-1)

II - i – ESSAIS A DEFORMATION CONSTANTE ET TEMPERATURE CONSTANTE

Comme pour l'essai précédent, on prépare une dizaine d'éprouvettes équipées de jauges. L'une d'elle est placée dans l'enceinte et fixée au dispositif de traction. Par la régulation, la température de l'enceinte est maintenue constante à une valeur repérée par la sonde thermique collée sur l'éprouvette. On exerce alors les efforts de traction F nécessaires pour que la déformation différentielle ($\epsilon_1 - \epsilon_2$) prenne les valeurs successives qu'on s'est fixé et pour chacune d'elles, on mesure la biréfringence avec le compensateur et F au dynamomètre pour calculer ($\sigma_1 - \sigma_2$). Ces essais sont poursuivis jusqu'à rupture de jauge. Alors, on change d'éprouvette et on recommence la même suite de mesures pour les mêmes valeurs de ($\epsilon_1 - \epsilon_2$) mais pour une valeur différente de la température de l'enceinte. On notera que les mesures doivent être exécutées de plus en plus rapidement au fur et à mesure que la température de l'enceinte augmente et que l'on pénètre plus avant dans le domaine plastique.

Le tableau des valeurs étant alors dressé (Tableau II-i-1) il suffira de choisir dans ce tableau les essais correspondant à une même valeur de la déformation différentielle pour tracer les courbes montrant les variations de la biréfringence en fonction de la contrainte différentielle à déformation constante (Graphe II-i-1).

Nous avons aussi présenté deux méthodes pour vérifier la relation (B-C-D) et on remarquera que nous aurions pu tout aussi facilement, faire des essais à contrainte constante et température constante, puis à déformation constante et température variable. Le type d'essai à température constante présente cependant un avantage sur celui à température variable. Il laisse apparaître en effet, que les points figuratifs relatifs à un même température sont sensiblement situés sur une droite passant par l'origine, ce qui confirme ainsi la loi de Maxwell.

L'analyse des résultats, montre que les points correspondant à une même déformation différentielle sont alignés sur une droite qui ne passe pas par l'origine des axes de coordonnées. A différentes valeurs de cette déformation correspondent des droites parallèles et leurs distances mutuelles sont proportionnelles à l'écart entre les différences des contraintes principales correspondantes. La pente commune de ces droites fournit la valeur de A/λ et leur ordonnée à l'origine donne B/λ . On trouve :

$$A/\lambda = 0,2 \text{ mm/kgp} \quad \text{et} \quad B/\lambda = 100 \text{ mm}^{-1}$$

Dans le domaine élastique, on devrait avoir :

$$\frac{A}{\lambda} + \frac{B}{\lambda} \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) = \frac{C}{\lambda}$$

$$\text{Premier membre : } 0,2 + 100 \left(\frac{1 + 0,37}{320} \right) = 0,63$$

$$\text{Deuxième membre : } \frac{0,36 \cdot 10^{-3}}{565 \cdot 10^{-6}} = 0,64$$

et cela constitue une bonne vérification.

On notera que dans toutes ces expériences, il nous est impossible de situer exactement la frontière entre le domaine élastique et le domaine plastique. On sait seulement que ce dernier domaine est atteint puisque les éprouvettes conservent une déformation résiduelle. Les expériences suivantes tentent de définir cette limite.

II - j – EXPERIENCES BIREFRINGENCE – DEFORMATION

Au chapitre précédent nous avons signalé la relation (I-I-6) qui peut se traduire dans nos conditions expérimentales par :

$$\frac{k \lambda}{e} = K (\epsilon_1 - \epsilon_2)^E + B (\epsilon_1 - \epsilon_2)^P.$$

Vérifier cette formule revient à mesurer la biréfringence et la déformation différentielle d'abord élastique ensuite plastique. Pour éviter toute variation de K , on travaille à température constante qui sera la température ambiante pour faciliter les opérations. On n'a donc pas besoin de l'enceinte thermique. L'éprouvette est garnie de jauges de déformation comme pour les expériences précédentes mais il n'est pas nécessaire de coller une jauge de température. Elle est ensuite placée sur le dispositif de traction et après avoir procédé aux réglages et contrôles de sa bonne position comme nous l'avons dit, elle est soumise à traction simple. Par raison de symétrie, les tenseurs déformations élastique et plastique ont mêmes directions principales dans la zone centrale de l'éprouvette. Pour éviter de mettre en oeuvre des déformations "visqueuses" qui sont supposées nulles dans l'établissement de la formule (II-j-1), on effectuera des mesures rapides de déformation différentielle et de biréfringence après chaque augmentation progressive de l'effort de traction. L'expérience ne s'arrêtera que par rupture des jauges dont l'élongation n'est pas illimitée, puis par rupture des éprouvettes.

Le tableau (II-j-1) groupe les valeurs moyennes obtenues sur trois éprouvettes identiques, initialement isotropes du point de vue optique, et à la température ambiante de $17,3^\circ\text{C}$. Le graphe (II-j-1) représente l'évolution de la biréfringence en fonction de la déformation.

TABLEAU (II - j - 1)

$(\epsilon_1 - \epsilon_2) \times 10^3$	2,5	5	7	10	13	15	18	20	22	24	25	rup.
$k/e \text{ mm}^{-1}$	0,40	0,81	1,14	1,54	2,06	2,48	2,83	3,11	3,32	3,46	3,53	-ture

La courbe obtenue peut être simplifiée et réduite à deux segments de droite OP et PQ. On admet qu'ils correspondent respectivement à l'évolution élastique puis plastique d'un corps élasto-plastique. La pente du premier segment rectiligne permet alors, de retrouver la valeur de K/λ :

$$K/\lambda = \frac{3200}{20} = 160 \text{ mm}^{-1} \quad \text{d'où} \quad K = 0,090$$

En menant par Q la parallèle à OP, on obtient en OR la déformation plastique si elle est atteinte, correspondant au point Q. Si on considère l'accroissement de k/e du point P au point Q, et qu'on le rapporte à la déformation différentielle plastique OR, on obtient la valeur de B/λ soit :

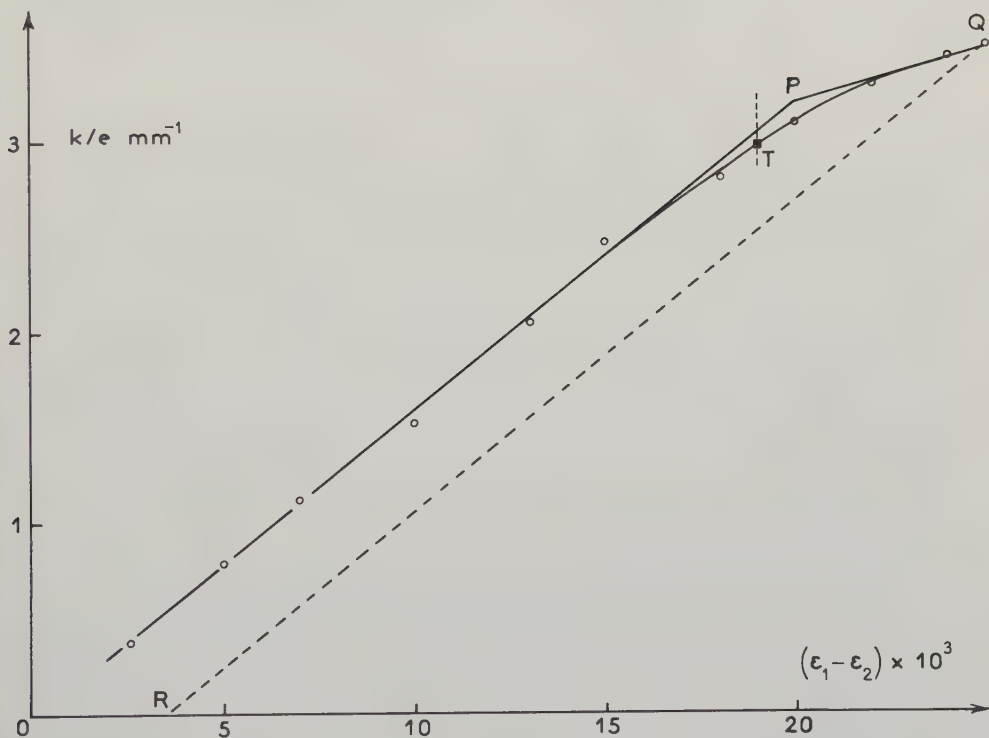
$$\frac{B}{\lambda} = \frac{0,32}{3 \cdot 10^{-3}} = 107 \text{ mm}^{-1}$$

Cette dernière évaluation est beaucoup moins assurée que la précédente.

REMARQUES

Les essais précédents montrent que pour l'araldite en traction, les limites de proportionnalité biréfringence-déformation et contrainte-déformation sont différentes. La première est bien supérieure à la seconde. C'est un fait qui a déjà été signalé par certains auteurs [II-j-1].

Les mesures que nous venons de faire permettent de déterminer un point P, qui pour un matériau élasto-plastique donné, peut être considéré comme une frontière entre les domaines de déformation élastique et plastique en traction. C'est un critère de plasticité. Si donc, on observe une plaque taillée dans un tel matériau et chargée progressivement dans son plan, toute isochromatique passant par un point où l'état correspondant au point P est atteint, constitue une frontière élastique-plastique. Celle-ci peut donc être entièrement déterminée par les procédés de la photoélasticimétrie.



GRAPHE (II - j - 1)
 Essai de définition d'une limite conventionnelle
 entre domaines élastique et plastique

Un programme intéressant de vérifications et de comparaison avec le critère de TRESCA [I-g-1] reste à faire. Certains auteurs s'y sont déjà intéressés en partant des lois de Maxwell [II-j-2]. Nous avons réalisé quelques mesures que nous poursuivrons ultérieurement en tenant compte des nouvelles expressions des lois de la photoélasticité formulées ici. Avant de poursuivre, on notera que la définition du point P est conventionnelle. Il pourrait être commode de choisir un nouveau critère de plasticité défini par un point T de la courbe k/e en fonction de $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$, tel que l'écart entre la position expérimentale et la tangente initiale ait une valeur fixée mais suffisante pour être assuré que le domaine plastique est atteint.

II - k — DISCUSSION ET REMARQUES GENERALES

La loi de la photoélasticité que nous avons proposée semble bien vérifiée dans les limites des erreurs [II-k-1]. Il est vrai cependant que le domaine exploré est peu étendu. Bien sûr, nous avons dépassé la limite d'élasticité et atteint le domaine plastique puisqu'il apparaît des déformations résiduelles mais ce dépassement reste faible. Aux températures inférieures à 15°C le matériau utilisé est cassant, sa résilience est faible et donc son domaine de plasticité étroit. Aux températures plus élevées, 60-80°C environ, les déformations sont grandes mais ce sont alors les jauges qui ne peuvent plus les suivre lorsque celles-ci dépassent 20%. Les autres types d'extensomètre sont d'un emploi très difficile et souvent impossible dans une enceinte thermique. D'autres techniques de mesure sont à l'étude.

Par ailleurs, nous avons particulièrement porté notre attention sur un seul matériau. Certes, il est largement utilisé en photoélasticimétrie et à cet égard nos résultats constituent une base utile. Mais une étude sur d'autres matériaux s'impose, c'est ce que nous envisageons.

II - I — METHODES DE DETERMINATION DES CONSTANTES A ET B

Outre celle signalée au paragraphe (I-j) et celle utilisée pour vérifier les lois linéaires, nous indiquons la méthode simple et rapide suivante :

Un milieu élastoplastique initialement isotrope est sollicité à partir d'un état isotrope (condition d'équiaxialité des tenseurs). Si le domaine plastique est atteint, la déformation résultante est la somme des déformations élastique et plastique et on peut écrire :

$$1 \quad \left(\frac{\delta_m}{e} \right)_1 = \left[A + B \frac{1 + \nu}{E} \right] (\sigma_1 - \sigma_2) + B (\epsilon_1 - \epsilon_2)^p$$

Au moment où on supprime les sollicitations la relation applicable est :

$$2 \quad \left(\frac{\delta_m}{e} \right)_2 = B (\epsilon_1 - \epsilon_2)^P$$

Si on mesure la déformation résiduelle $(\epsilon_1 - \epsilon_2)^P$, on obtient :

$$3 \quad B = \left(\frac{\delta_m}{e} \right)_2 / (\epsilon_1 - \epsilon_2)^P$$

qui jointe à $\left[A + B \left(\frac{1 + \nu}{E} \right) \right] = C$, achève de déterminer A connaissant C.

Si on fait la différence :

$$4 \quad \left(\frac{\delta_m}{e} \right)^* = \left(\frac{\delta_m}{e} \right)_1 - \left(\frac{\delta_m}{e} \right)_2$$

Il vient :

$$5 \quad \left(\frac{\delta_m}{e} \right)^* = C (\sigma_1 - \sigma_2)$$

La méthode permet donc en plus de mesurer la différence des contraintes principales dans un milieu en état inélastique par les moyens de la photoélasticimétrie. Mais alors, il faut effectuer deux mesures au lieu d'une seule dans le domaine élastique. On remarquera, cependant, l'analogie de la relation (5) précédente avec celle de Maxwell (1-i-4).

CHAPITRE III

VERIFICATIONS EXPERIMENTALES DANS LES CAS DE NON COAXIALITE DES TENSEURS CONTRAINTE ET DEFORMATION

III - a – INTRODUCTION

Depuis longtemps, on sait que les lois de Maxwell ou de Neumann se vérifient parfaitement si le milieu d'étude est initialement isotrope et si les sollicitations appliquées ne provoquent pas de variations de l'orientation relative des axes des tenseurs contrainte et déformation . Il semble que dans le domaine d'évolution élastique ces conditions assurent une coïncidence exacte des axes. Certains expérimentateurs [III-a-1 et 2] ont constaté en effet que cette coïncidence pouvait ne pas être réalisée si une de ces conditions n'était pas satisfaite. Alors, comme l'a montré FROCHT [III-a-3], les axes du tenseur des indices d'un milieu transparent ne sont pas nécessairement confondus avec ceux de l'un ou de l'autre de ces tenseurs.

Ceci conduit à penser que pour établir un état de non coaxialité nécessaire aux vérifications qui nous intéressent, il faut disposer d'un milieu anisotrope et le solliciter de telle façon que les axes des tenseurs appliqués aient des directions différentes de celles des axes des tenseurs responsables de l'anisotropie.

Un état d'anisotropie initiale peut être obtenu dans l'araldite par le procédé du figeage des déformations dont nous avons déjà parlé [I-g-3]. Dans le but de vérifier les relations établies au paragraphe (I-k) on choisira donc des éprouvettes en araldite rendue anisotrope par figeage. Pour les raisons que nous avons déjà exposées au chapitre précédent, paragraphe (II-a), les éprouvettes seront planes et d'épaisseur constantes. On facilite les mesures sans restreindre la généralité des vérifications, en s'arrangeant pour que les tenseurs des contraintes, des déformations et des indices admettent la normale au plan moyen de l'éprouvette comme direction principale commune. Ceci impose que les éprouvettes soient sollicitées uniquement dans leur plan. L'étude sera conduite dans ce cas particulier.

III - b – ETUDE D'UN CAS PARTICULIER

Les tenseurs ont une direction principale commune : la normale à la plaque. La déformation figée est supposée correspondre à celle d'une traction simple uniforme

dans le plan de l'éprouvette (fig. III-b-1). Deux des directions principales de déformation x_{01} et x_{02} sont situées dans ce plan, elles ont même direction en tous points et les déformations principales correspondantes peuvent s'écrire :

$$\epsilon_0 \text{ suivant } Ox_{01}.$$

$$-\nu \epsilon_0 \text{ suivant } Ox_{02}.$$

O est un point quelconque de l'éprouvette et ν le coefficient de Poisson du matériau.

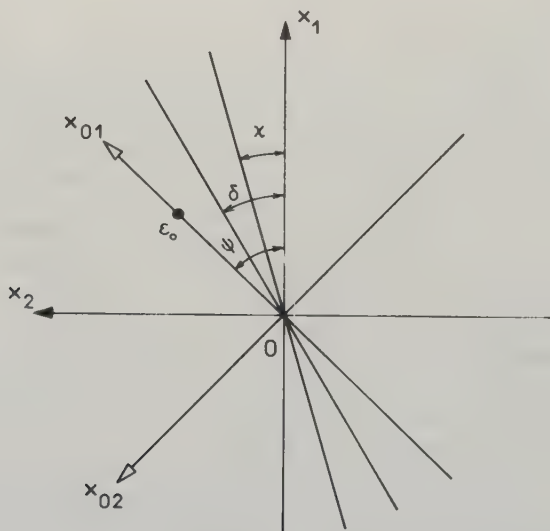


FIGURE (III - b - 1))

x_{01} direction de traction simple figée dans une éprouvette d'araldite

x_1 direction de traction simple appliquée

On suppose alors exercer une contrainte uniaxiale uniforme dans la direction x_1 située dans le plan de l'éprouvette et faisant avec x_{01} un angle ψ . Les contraintes principales sont alors :

$$\sigma_1, \text{ suivant } Ox_1$$

$$\sigma_2 = 0, \text{ suivant } Ox_2 \text{ normal à } Ox_1,$$

$$\sigma_3 = 0, \text{ suivant } Ox_3 \text{ normal au plan de l'éprouvette.}$$

La composition des déformations permet d'écrire :

suivant Ox_1 :

$$\epsilon_{11} = \frac{\epsilon_0 - \nu \epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_0 + \nu \epsilon_0}{2} \cos 2\psi + \frac{\sigma_1}{E}$$

suivant Ox_2 :

$$\epsilon_{22} = \frac{\epsilon_0 - \nu \epsilon_0}{2} - \frac{\epsilon_0 + \nu \epsilon_0}{2} \cos 2\psi - \frac{\nu \sigma_1}{E}$$

glissement :

$$\epsilon_{12} = \frac{\epsilon_0 + \nu \epsilon_0}{2} \sin 2\psi$$

Les déformations principales sont alors :

3

$$\left. \begin{matrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2} \right)^2 + \epsilon_{12}^2}$$

Les directions principales correspondant à ces déformations font avec Ox_1 les angles δ et $(\delta + \frac{\pi}{2})$ définis par :

4

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}$$

soit

5

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{\sin 2\psi}{\cos 2\psi + \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \cdot E}}$$

Il y a donc un état de contrainte (σ_1, σ_2) et un état de déformation (ϵ_1, ϵ_2) dont les directions principales ne sont pas en coïncidence.

Les directions principales du tenseur mécanique m_{ij} s'obtiennent à partir de la relation (I-k-1) qui peut s'écrire puisqu'alors $\gamma = 0$:

$$6 \quad \operatorname{tg} 2 \chi = \frac{\sin 2 \delta}{\frac{a}{b} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} + \cos 2 \delta}$$

$$7 \quad \text{mais} \quad (\epsilon_1 - \epsilon_2) = \epsilon_0 (1 + \nu) \sqrt{\left[\cos 2 \psi + \frac{\sigma_1}{E \epsilon_0} \right]^2 + \sin^2 2 \psi}$$

$$8 \quad \text{donc :} \quad \operatorname{tg} 2 \chi = \frac{\sin 2 \psi}{\cos 2 \psi + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 (1 + \nu)} \left[\frac{a}{b} + \frac{1 + \nu}{E} \right]}$$

$$9 \quad \text{or :} \quad \frac{a}{b} = \frac{A}{B} \quad \text{et} \quad \left(\frac{A}{B} + \frac{1 + \nu}{E} \right) = \frac{C}{B}$$

La valeur de C est celle correspondant au matériau figé à la température où se déroule l'expérience soit θ . On écrira donc C_θ .

Si la déformation figée satisfait à la relation (II-a-2) soit :

$$(n_1 - n_2) = \frac{\delta_m}{e} = A (\sigma_1 - \sigma_2) + B (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

avant d'appliquer la contrainte σ_1 , on a :

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = 0 \quad \text{et} \quad (\epsilon_1 - \epsilon_2) = (1 + \nu) \epsilon_0$$

et de la mesure de la biréfringence à ce moment là, on déduit :

$$10 \quad \left(\frac{\delta_m}{e} \right)_0 = B (1 + \nu) \epsilon_0$$

reportant les relations (9) et (10) dans (8), on obtient :

$$11 \quad \operatorname{tg} 2 \chi = \frac{\sin 2 \psi}{\cos 2 \psi + \frac{\sigma_1 C_\theta}{(\delta_m/e)_0}}$$

et la relation (1-k-2) s'écrit :

$$12 \quad \left(\frac{\delta_m}{e} \right)^2 = \left(\frac{\delta_m}{e} \right)_0^2 \left[\sin^2 2 \psi + \left(\cos 2 \psi + \frac{C_\theta}{(\delta_m/e)_0} \sigma_1 \right)^2 \right]$$

Si les mesures de biréfringence se font avec la même lumière, c'est-à-dire avec la même longueur d'onde, la formule précédente devient :

$$13 \quad (k/e) = (k/e)_0 \sqrt{\sin^2 2 \psi + \left[\cos 2 \psi + \frac{C_\theta \sigma_1}{(\delta_m/e)_0} \right]^2}$$

En estimant que l'épaisseur de la plaque d'essai n'a pratiquement pas varié, on a :

$$14 \quad \frac{k/e}{(k/e)_0} = \frac{k}{(k)_0}$$

REMARQUES :

1) Si $(\delta_m/e)_0 = 0$. Il n'y a pas de biréfringence initiale et les relations (5), (8) et (12) deviennent :

$$15 \quad \operatorname{tg} 2 \delta = 0, \quad \operatorname{tg} 2 \chi = 0, \quad (\delta_m/e) = C_\theta \sigma_1$$

Il y a coïncidence des axes et on retrouve la relation bien connue de Maxwell.

2) Si $\psi = 0$ ou $\psi = \pi/2$, il vient :

$$16 \quad (\delta_m/e) = (\delta_m/e)_0 + C_\theta \sigma_1$$

La relation entre (δ_m/e) et σ_1 est linéaire et les biréfringences initiale, et imposée par contraintes s'ajoutent.

3) Pour ψ compris entre 0 et $\pi/2$, la relation entre (δ_m/e) et σ_1 n'est pas linéaire. Pour une même valeur de σ_1 l'écart entre les valeurs de (δ_m/e) tirées respectivement des relations (12) et (16) est maximum pour $\psi = \pi/4$.

Sur la figure (III-b-2) nous avons représenté les différentes phases de la déformation au point O :

(a) — Sur la plaque d'araldite isotrope, on a tracé deux axes Ox_{01} et Ox_{02} et un cercle (C_0) de centre O.

(b) — Après traction simple suivant Ox_{01} et figeage, le cercle (C_0) s'est transformé sensiblement en une ellipse (E_0) dont les axes sont Ox_{01} et Ox_{02} , lesquels sont aussi les axes optiques ou du tenseur des indices. Ces axes optiques se déterminent à partir de la mesure de l'angle isocline en O [I-a-4] à l'aide d'un polariscope rectiligne. On trace alors le cercle (C) du centre O.

(c) — Dans la direction Ox_1 qui fait l'angle ψ avec Ox_{01} , on exerce une contrainte uniforme de traction σ_1 . Le cercle (C) se transforme sensiblement en une ellipse (E) dont les axes ne sont confondus ni avec Ox_{01} ou Ox_{02} , ni avec Ox_1 ou Ox_2 . Quant à l'ellipse (E_0) elle se transforme sensiblement en une nouvelle ellipse (E'_0). Les axes de (E'_0) font un angle δ avec Ox_1 . Les axes du tenseur optique, qui sont aussi par hypothèse ceux du tenseur mécanique, font avec Ox_1 un angle χ .

III - c — ESSAIS ET RESULTATS

Vérifier les résultats obtenus dans l'étude précédente, c'est vérifier les lois établies au paragraphe (I-k). Pour cela, il suffira de préparer des éprouvettes planes adéquates sur lesquelles il sera possible de déterminer les directions principales des tenseurs contrainte indice et déformation, dont l'une d'elles, commune à ces tenseurs, est normale au plan de l'éprouvette, puis de faire les mesures nécessaires pour vérifier les relations (III-b-5, 11 et 13).

Contraintes

Nous avons vu au paragraphe (II-d) que les contraintes principales et leur direction se déterminent facilement si on soumet des éprouvettes planes, d'épaisseur constante, à une traction uniaxiale simple. Pour des raisons que nous avons déjà dites, les éprouvettes seront de format identique à celles utilisées pour les vérifications exposées au chapitre précédent. Le dispositif de traction sera le même.

Indices

En incidence normale ou quasi-normale la biréfringence se mesurera à l'aide du comparateur numérique (paragraphe II-e). Si les éprouvettes sont uniquement sollicitées dans leur plan, le tenseur des indices pour raison de symétrie a une direction principale normale à ce plan. Les deux autres sont situées dans ce plan et se repèrent à l'aide d'un polariscope rectiligne (mesure classique de l'angle isocline). On rappelle que ces directions principales sont aussi par hypothèse celles du tenseur mécanique m_{ij} .

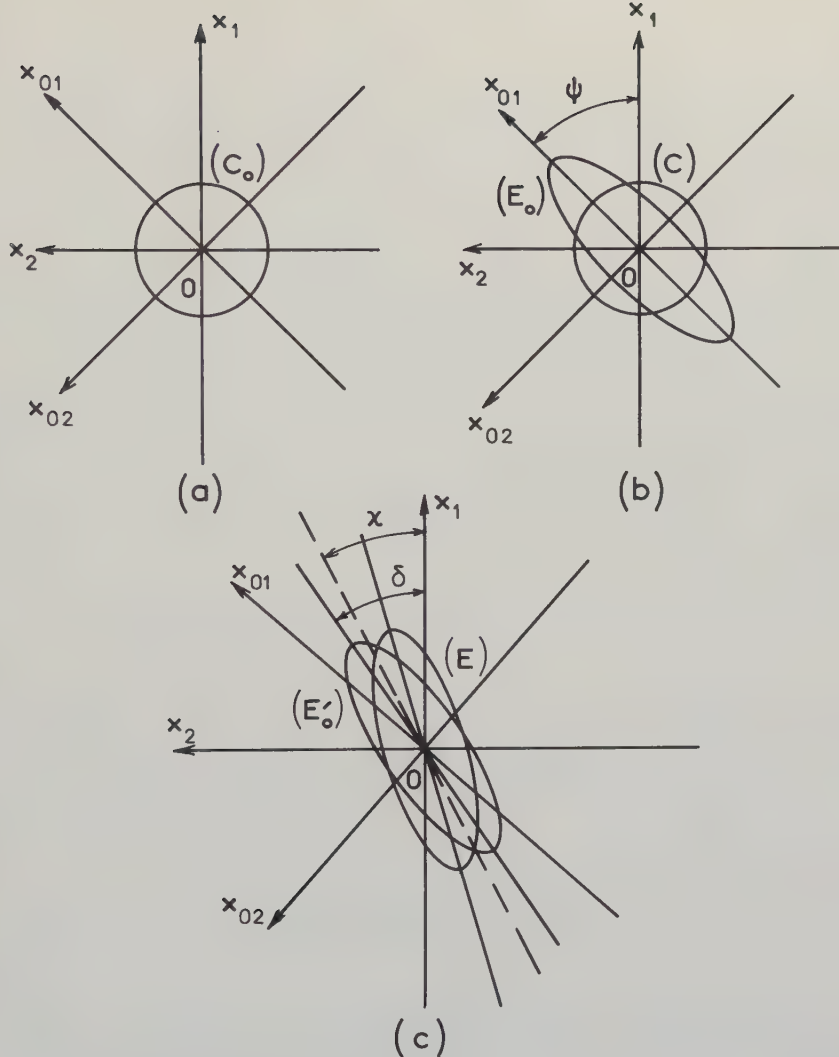


FIGURE (III - b - 2)

Schémas explicatifs sur les déformations subies par une éprouvette d'araldite figée en état de traction simple et soumise à une traction simple dans une direction différente de celle de la traction figée

Déformations

Dans l'état actuel de notre équipement, il nous est impossible de connaître les déformations principales résultantes et leur direction. Il faudrait en effet disposer d'extensomètres résistant aux températures de figeage (150°C environ) et pouvant mesurer de grandes élongations. Les seules déformations accessibles sont les déformations intermédiaires correspondant à l'application de la traction uniaxiale après la déformation de figeage. Ce sont celles qui sont caractérisées par l'ellipse (E) de la figure (III-b-2-c). Il est donc impossible de vérifier la relation (III-b-5) donnant la valeur de l'angle δ . Il est cependant possible de montrer la non coïncidence deux à deux des axes des tenseurs contrainte , déformation et indice . Comme nous l'avons déjà signalé, il suffit de tracer au centre de l'éprouvette isotrope un petit cercle. Après déformation et figeage, il se transforme en une ellipse (E_0). L'application de la contrainte uniaxiale dont la direction fait un angle $\psi \neq 0$ avec l'une des directions principales de la déformation figée, transforme (E_0) en l'ellipse (E'). Par photographie et agrandissement de ces ellipses, on peut tracer leurs axes approximativement mais avec une précision suffisante pour contrôler que ces axes ne sont en coïncidence ni avec ceux du tenseur contrainte (σ_1 et $\sigma_2 = 0$), ni avec ceux du tenseur des indices, ces deux derniers systèmes d'axes n'étant pas eux-mêmes confondus.

Ces expériences simples sur l'araldite nous ont permis de constater :

a) durant le figeage, il y a coïncidence des axes principaux des tenseurs contrainte , déformation et indice .

b) après déformation de figeage et application d'une contrainte uniaxiale σ_1 telle que $\psi \neq 0$, les directions principales des tenseurs, y compris celles du tenseur intermédiaire de déformation matérialisé par l'ellipse (E), sont toutes différentes.

c) une lente variation angulaire des directions des axes des ellipses (E) et (E_0) apparaît principalement durant la première heure (3 degrés environ). C'est en quelque sorte un " fluage " axial qu'il serait intéressant d'analyser plus précisément. La non-coaxialité des tenseurs lorsque le milieu initial n'est pas isotrope est donc un fait bien établi [III-a-3 et III-c-1].

Pour vérifier les relations [III-b-11 et 13], il nous faut disposer de plusieurs éprouvettes dans un état uniforme et identique d'anisotropie initiale avec un axe principal du tenseur des indices normal à leur plan. Cela ne peut-être obtenu qu'en les découpant dans une même plaque préparée dans cet état.

Si le figeage est de principe simple, l'opération est cependant délicate dans nos conditions. C'est pourquoi, nous nous sommes adressé à des laboratoires spécialisés. Malgré les difficultés, ceux-ci ont pu préparer pour nous trois plaques dont une seule acceptable pour nos mesures. De format carré 300 x 300 mm, elle est figée dans un état de traction simple uniforme suivant une direction parallèle à un de ses côtés. Placée entre polariseurs croisés, elle laisse apparaître une biréfringence uniforme, sauf peut-être

sur les bords mais cela n'est pas gênant. Les caractéristiques utiles sont :

$$C_{18^{\circ}\text{C}} = 360.10^{-6} \text{ mm}^2/\text{kgp}$$

$$e = 2 \text{ mm}$$

$$(k/e)_0 = 1,15 \text{ mm}^{-1}$$

cette dernière valeur est mesurée au comparateur après figeage, car celui-ci ne permet pas de préparer une plaque avec une telle caractéristique exactement connue à priori.

Le matériau disponible étant limité en quantité, force a été de réduire le nombre des essais en ne considérant :

— qu'une seule température : la température ambiante $\theta = 18^{\circ}$ environ. L'enceinte thermique n'est donc pas employée.

— qu'une seule valeur de l'angle ψ .

Compte tenu de la remarque faite au paragraphe précédent (III-b) nous avons choisi $\psi = \pi/4$. L'absence de linéarité entre (k/e) et σ_1 dans la formule (III-b-13) sera donc d'autant mieux marquée.

Dans la plaque anisotrope, nous avons alors taillé parallèlement plusieurs éprouvettes de format 25 x 250 mm, dont l'axe longitudinal fait un angle $\psi = \pi/4$ avec la direction de traction figée. Une d'entre elles est placée sur le dispositif de traction et soumise à une nouvelle traction longitudinale simple qui établit un état uniforme de contraintes dont les valeurs et directions principales sont :

$$\sigma_1 = F/A, \text{ dans la direction longitudinale de l'éprouvette,}$$

F effort de traction,
 A aire de la section droite.

$$\sigma_2 = 0, \text{ dans la direction transversale.}$$

$$\sigma_3 = 0, \text{ suivant la normale à la plaque.}$$

Cet état uniforme est surtout réalisé dans la zone médiane de l'éprouvette, loin des mâchoires de traction et comme nous l'avons signalé au paragraphe (II-d), un contrôle optique de biréfringence permet de s'assurer de la bonne fixation de l'éprouvette dans les mors et de l'absence de flexions parasites.

Cela étant, on applique à l'éprouvette un effort progressif de traction jusqu'à rupture en mesurant :

- l'effort de traction F pour déduire $\sigma_1 = F/A$
- la valeur de la biréfringence au centre de l'éprouvette pour calculer (k/e)
- la valeur de l'angle χ qui s'obtient comme pour une mesure d'un angle isocline avec un polariscope rectiligne.

L'éprouvette étant rompue, on recommence une série de mesures analogues sur une autre des éprouvettes identiques préparées.

Nous nous sommes imposé a priori des valeurs repérées de F , correspondant à des valeurs données de σ_1 . Nous avons mesuré ensuite k pour calculer (k/e) , et χ pour avoir 2χ . Sur le tableau (III-c-1) sont portées la moyenne des valeurs mesurées et les valeurs homologues calculées à partir des formules (II-b-11 et 13) pour chacune des valeurs de σ_1 qu'on s'est fixées.

Pour (k/e) l'écart entre la valeur mesurée et la valeur moyenne est au maximum de 2,8 %. Pour χ , cet écart est de 2 degrés d'angle. Sur le graphe (III-c-1) sont tracées les hyperboles représentatives de $\tan 2\chi$ en fonction de σ_1 d'après la relation (III-b-11) dans laquelle on a fait :

$$C_{\theta} = C_{18^{\circ}\text{C}} = 360.10^{-6} \text{ mm}^2/\text{kgp},$$

et successivement :

$$(k/e)_0 = 0, 0,5, 1, 2, 3.$$

Sur le graphe (III-c-2)) sont tracées dans les mêmes conditions, les courbes représentant les variations de (k/e) en fonction de σ_1 d'après la relation (III-b-13)

Sur les graphes (III-c-3 et 4) nous avons représenté à la fois la courbe théorique et les points expérimentaux déduits du tableau (III-c-1). On constate une étroite coïncidence entre les valeurs théoriques et expérimentales. Pour (k/e) en fonction de σ_1 , cette corrélation est très bonne pour les faibles charges, elle semble pourtant se dégrader dès que la contrainte σ_1 augmente et approche la valeur de rupture. Il semble qu'il y ait à ce stade de la déformation quelques phénomènes annexes qui perturbent les résultats.

III - d – OBSERVATIONS

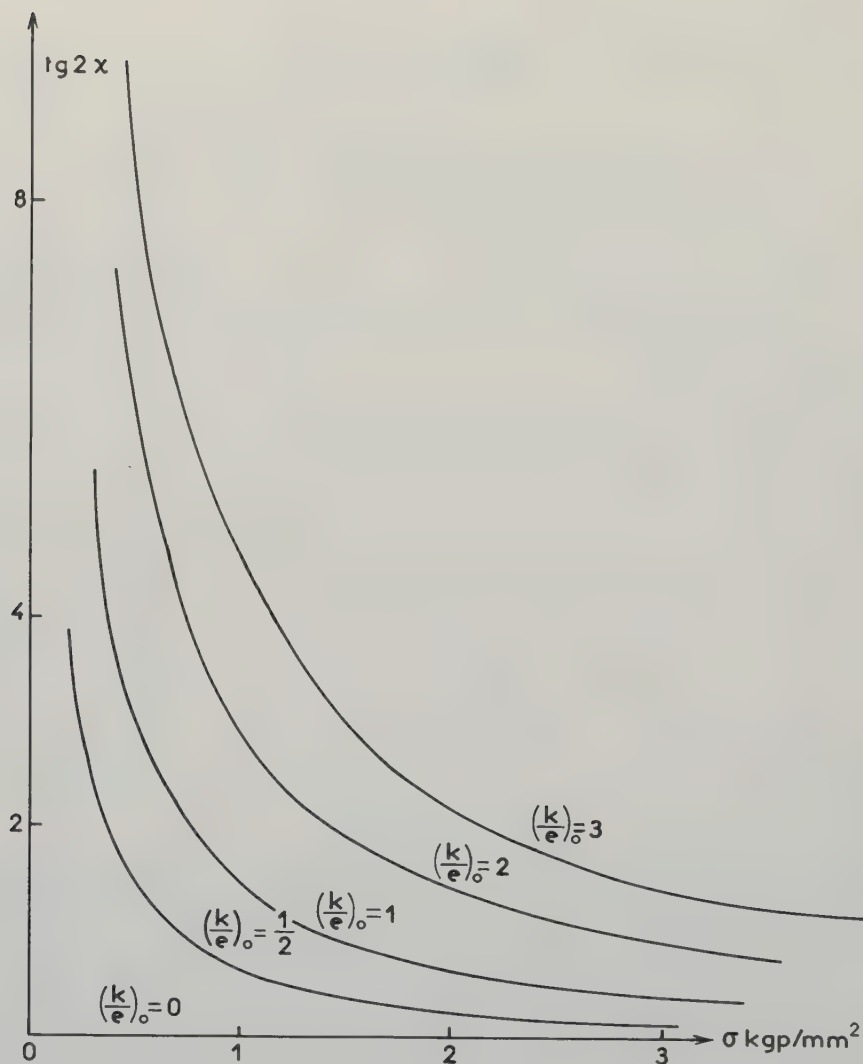
Dans le petit domaine d'exploration qui a été celui de cette étude, nous avons pu constater que les nouvelles expressions des lois de la photoélasticité peuvent être considérées comme vérifiées pour l'araldite.

TABLEAU (III - c - 1)

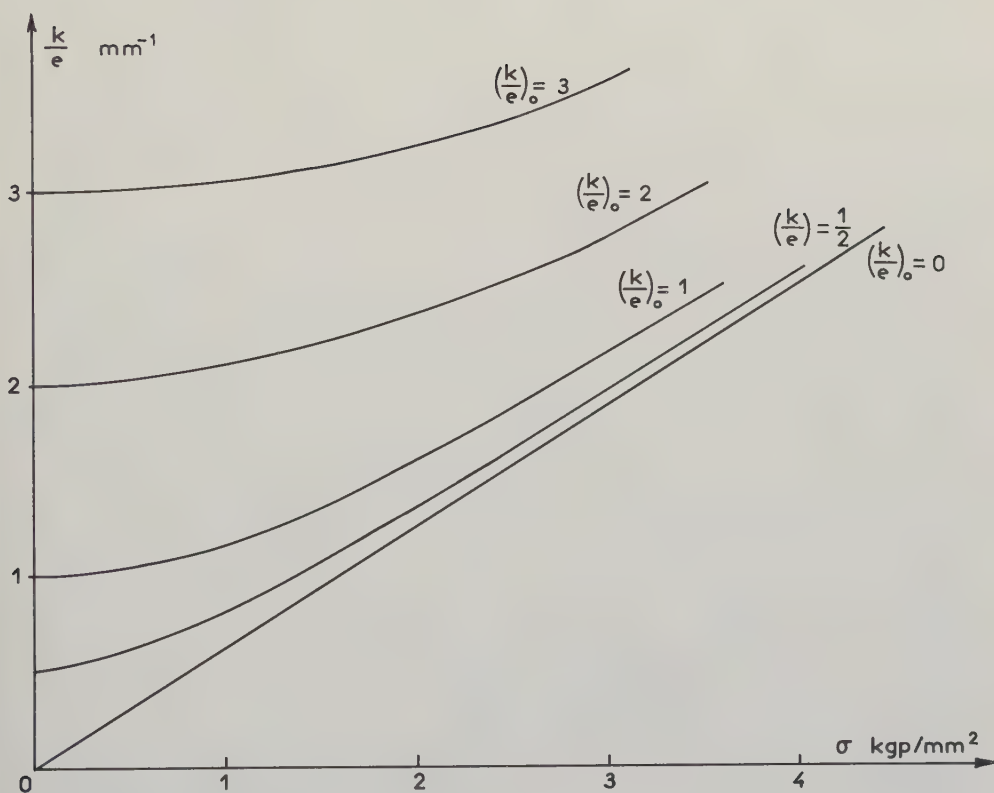
σ_1 kgp/mm ²	2 χ degré mesuré	tg 2 χ	k/e mm ⁻¹ mesuré	k/e mm ⁻¹ calculé	tg 2 χ calculé
0	—	—	1,15	1,15	—
0,5	74	3,48	1,20	1,19	3,61
1	62	1,88	1,30	1,31	1,80
1,5	50	1,19	1,45	1,49	1,20
2	42	0,93	1,75	1,74	0,90
2,5	36	0,72	2,0	1,96	0,72
3	32	0,62	2,2	2,23	0,60
3,5	28	0,53	2,5	2,50	0,51
4	24	0,44	2,7	2,79	0,45
4,5	21	0,39	3,0	3,08	0,41
rupture					

note : les calculs ont été effectués en prenant :

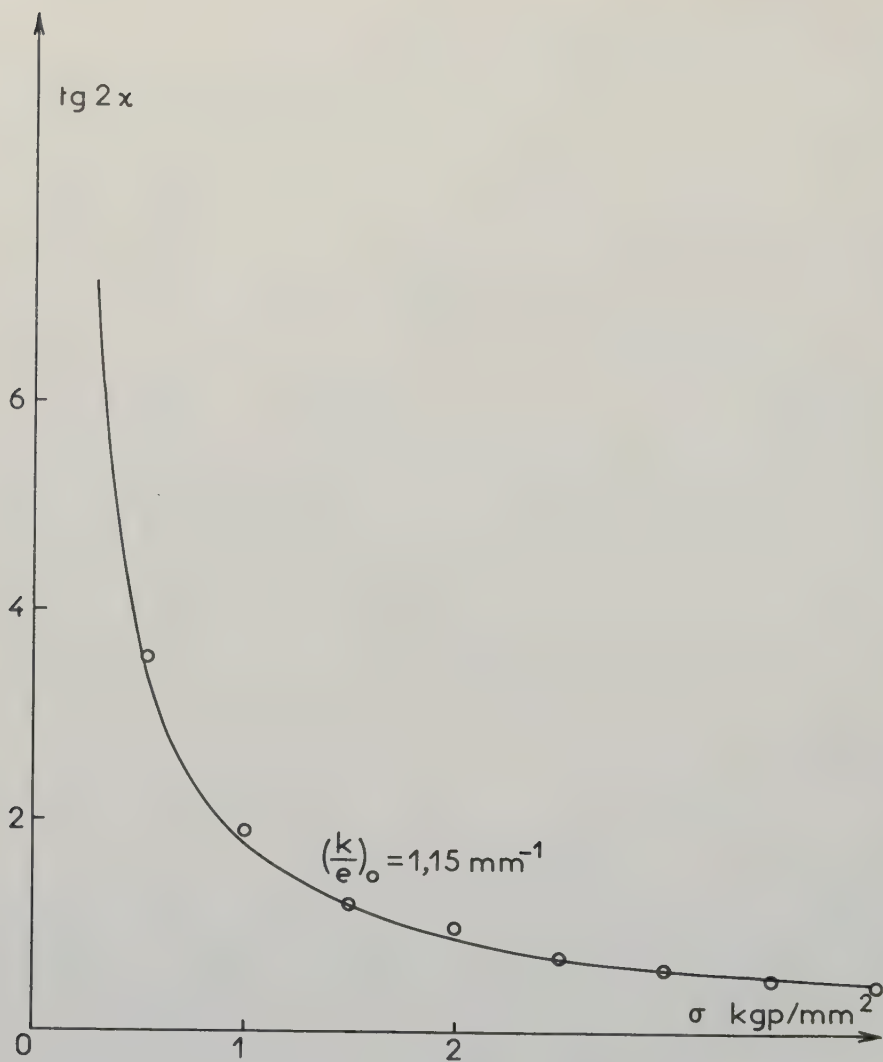
$$\frac{C_\theta}{(\delta_m/e)_0} = \frac{C_\theta}{(k/e)_0 \lambda} = \frac{360 \cdot 10^{-6}}{1,15 \cdot 565 \cdot 10^{-6}} = 0,554 \text{ mm}^2/\text{kgp}$$



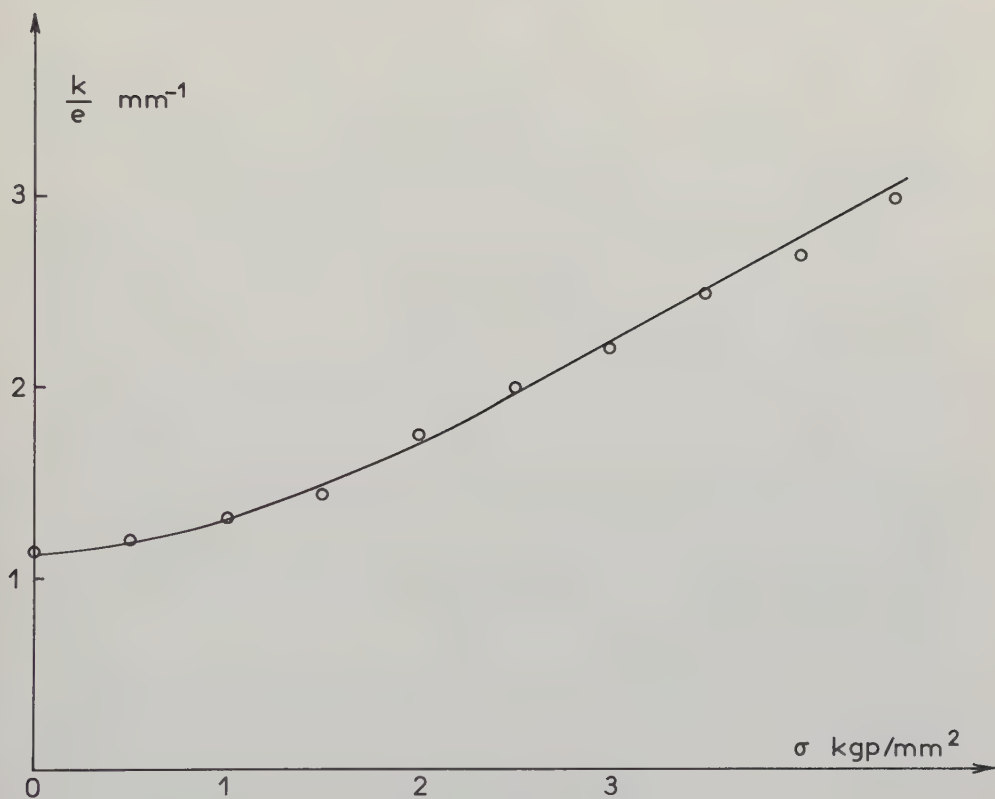
GRAPHE (III - c - 1)
 Courbes théoriques d'après la relation (III-b-11)
 pour $C_0 = 360 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{kgp}$



GRAPHE (III - c - 2)
 Courbes théoriques d'après la relation (III-b-13)
 avec $C_0 = 360 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{kgp}$



GRAPHE (III - c - 3)
Points expérimentaux et courbe théorique



GRAPHE (III - c - 4)
Points expérimentaux et courbe théorique

Ce travail met en évidence les grandes possibilités des méthodes photoélasticimétriques, même au delà du domaine élastique. Il souligne la nécessité d'introduire deux constantes caractéristiques photo-élastiques pour un matériau donné, dont l'une peut-être particulièrement liée à l'état plastique. Enfin, il découvre le rôle important joué par la coïncidence ou non de certains tenseurs sur la linéarité des phénomènes observés et par conséquent sur les possibilités d'application du principe de superposition, des lois de similitude, des théorèmes sur l'énergie interne etc... Il y a là, tout un domaine encore inexploré.

Plus immédiatement, il reste à étendre l'expérimentation à des matériaux photoélastiques autres que l'araldite et à considérer le problème des sollicitations multidirectionnelles pour lequel il ne semble pas y avoir de trop grandes difficultés si ce n'est la complexité des équations et la nécessité de modifier les techniques expérimentales.

Dans le cadre des lois classiques, certains auteurs [III-a-2], se sont intéressés aux phénomènes de non coaxialité des axes des tenseurs des indices, des déformations ou des contraintes résultant de sollicitations multidirectionnelles, sans pouvoir définir des lois précises. Il semble que la forme des lois de la photoélasticité que nous proposons soient plus adaptées à ce genre d'étude comme d'ailleurs à celui des milieux juxtaposés. Nous appelons ainsi des milieux liés par collage ou par soudure permettant de faire l'analyse du comportement de l'un à partir des observations faites sur l'autre. C'est le cas par exemple de résines photoélastiques collées sur une pièce mécanique dont on veut connaître l'état superficiel des contraintes ou des déformations. Une telle étude suppose une isotropie initiale des deux milieux. Or cette condition est rarement réalisée pour le milieu support. Des erreurs sont alors inévitables. Il est possible alors de construire de la pièce une maquette isotrope que l'on recouvre de la même résine photoélastique. L'étude comparée du comportement des deux revêtements laisse apparaître des différences qui peuvent être exploitées dans le cadre des nouvelles expressions des lois de la photoélasticité.

Intéressante sur le plan théorique, cette exploitation l'est aussi sur le plan industriel, si elle peut fournir des indications sur l'état d'anisotropie résiduelle ou permanente des pièces mécaniques [III-c-2].

CHAPITRE IV

ETUDE DES CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES

IV - a – GENERALITES ET RAPPELS THEORIQUES

Les méthodes d'essais dynamiques des matériaux sont intéressantes parce qu'elles démasquent un certain nombre de phénomènes qui ont un temps de relaxation trop court pour être repérés lors des essais statiques. Elles permettent donc de recueillir des informations supplémentaires sur le comportement des matériaux [IV-a-1]. Les sollicitations dynamiques entraînent en général des modifications apparentes ou réelles de certaines constantes caractéristiques des matériaux, telles que E , ν , K , C , A , B etc... Des variations de ces caractéristiques ont effectivement été constatées en fonction de la vitesse de variation des sollicitations [IV-a-2]. C'est pourquoi de nombreux travaux ont été entrepris dans ce domaine de recherche depuis une vingtaine d'années [IV-a-3].

Jusqu'en 1960–1965, la plupart des auteurs déterminaient les caractéristiques dynamiques à partir d'essais simples consistant par impact ou par explosif, à provoquer un choc dans le milieu à analyser [IV-a-4]. Celui-ci est alors parcouru par des ondes de compression se propageant avec une vitesse limite v . La mesure de v permet alors de calculer le module d'Young dynamique E^ [IV-a-5] à partir de la relation :*

$$E^* = \rho v^2.$$

où ρ est la masse volumique du milieu.

S'il y a choc d'une masse M animée d'une vitesse v_0 suivant l'axe longitudinal d'un barreau dont l'aire de la section est A , on peut aussi écrire :

$$E^* = \frac{M v_0}{A \int_0^T \epsilon(t) dt}$$

t : temps

T : durée de l'impact.

puisque par définition :

$$E^* = \frac{\int_0^T \sigma(t) dt}{\int_0^T \epsilon(t) dt} \quad \text{et} \quad \sigma(t) = \frac{F(t)}{A}$$

$F(t)$, force d'impact

et que :

$$M v_0 = \int_0^T F(t) dt$$

De même le coefficient de Poisson dynamique se calcule à partir de la relation de définition :

$$\nu^* = \frac{\int_0^T \epsilon_2(t) dt}{\int_0^T \epsilon_1(t) dt}$$

où $\epsilon_1(t)$ et $\epsilon_2(t)$ sont respectivement les déformations longitudinale et transversale du barreau durant l'impact.

Grâce à l'emploi de capteurs électriques à court temps de réponse, les enregistrements de l'évolution des variables utiles en fonction du temps, facilitent la détermination des caractéristiques dynamiques définies par les relations précédentes et permettent d'apprécier les déphasages.

Cependant l'application de tels chocs provoque généralement dans le milieu, l'apparition d'un spectre d'ondes de déformation et de contrainte. Chacune de ces ondes a une vitesse de propagation et un amortissement qui lui sont propres. Tout cela ne facilite pas l'exploitation des résultats.

Pour une meilleure analyse des phénomènes et une bonne interprétation des mesures, on a alors pensé que l'action de sollicitations périodiques de forme simple (sinusoïdale, triangulaire, carrée) était préférable à l'action par choc. Suivant ces considérations, de nouvelles méthodes d'essai se sont développées depuis 1960–1965 principalement sous l'impulsion de chercheurs américains [IV-a-6, 7 et 8]. Simultanément sont apparus dans le commerce d'excellents appareils électrodynamiques (shakers), capables de fournir des efforts périodiques importants, de forme relativement pure et cela dans une large bande de fréquences. Ces tests périodiques sont à l'origine des définitions des caractéristiques dynamiques à partir d'expression complexes, appelées caractéristiques complexes.

IV - b — LES CARACTERISTIQUES COMPLEXES

Si à l'effet élastique est lié un "effet visqueux" linéaire η , on peut écrire [IV-b-1] :

$$1 \quad \sigma = \sigma^E + \sigma^\eta = E\epsilon + \eta \dot{\epsilon}$$

$$\text{avec} \quad \dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$$

$$2 \quad \text{En posant :} \quad \sigma = (\sigma) e^{i(\omega t + \varphi)} \quad \text{et} \quad \epsilon = (\epsilon) e^{i\omega t}$$

où φ représente l'angle de phase entre la contrainte et la déformation, on a :

$$3 \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega \eta}{E}$$

Le module complexe d'élasticité E^c est défini par la relation :

$$4 \quad E^c = \frac{\sigma}{\epsilon} = E^* \cdot e^{i\varphi}$$

où la partie réelle de E^c soit E^* , est le module dynamique d'élasticité à la fréquence ω . On sait que :

$$5 \quad E^* = \sqrt{E^2 + \omega^2 \eta^2} = E \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

Des expériences ont montré [IV-a-7] qu'en général le coefficient de Poisson ν est pratiquement insensible aux variations de la fréquence ω . Il peut donc être considéré comme une quantité réelle, égale à celle déterminée dans les essais statiques. Dans ces conditions, le module de Coulomb ou module de cisaillement complexe [IV-a-8] peut être défini par la relation :

$$G^c = \frac{E^c}{2(1 + \nu)}$$

Le module de cisaillement dynamique sera alors :

$$6 \quad G^* = \frac{E^*}{2(1 + \nu)}$$

Partant des relations mécanique-biréfringence [1-i-2,3,4] on définira de la même manière des caractéristiques optico-mécaniques complexes et dynamiques par les relations :

$$\begin{aligned} (n_1 - n_2) &= C^* e^{i\varphi_\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2) \\ (n_1 - n_2) &= K^* e^{i\varphi_\epsilon} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \\ (n_1 - n_2) &= W^* e^{i\varphi_m} (m_1 - m_2) \end{aligned}$$

où φ_σ , φ_ϵ et φ_m représentent respectivement les angles de phase entre les différences $(\sigma_1 - \sigma_2)$, $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$, $(m_1 - m_2)$ et la biréfringence $(n_1 - n_2)$.

En particulier, on pourra écrire :

$$A^* + B^* \left(\frac{1 + \nu}{E^*} \right) = C^*$$

$$\frac{A^* E^*}{(1 + \nu)} + B^* = K^*$$

Les essais en fréquence, permettant de déterminer les angles de phase et caractéristiques dynamiques, ont été poursuivies dans des laboratoires spécialisés, équipés de shakers électrodynamiques et de pulsateurs hydrauliques liés à d'importantes baies de mesure et de régulation, qui ont été mis aimablement à notre disposition.

IV - c – ESSAIS ET RESULTATS

A) – Le coefficient de Poisson ne dépend pas de la fréquence.

En un point d'une éprouvette sollicitée statiquement, on suppose pouvoir calculer le coefficient de Poisson ν à partir de mesures de déformations. On doit vérifier que le résultat des calculs est indépendant de la pulsation des sollicitations périodiques appliquées. L'éprouvette d'essai est une petite poutre en araldite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions 400 x 30 x 15 mm. Une de ses extrémités est pincée entre deux mâchoires liées à un bâti fixe et peut être considérée comme encastree. L'autre est renforcée et rendue solidaire du plateau mobile d'un shaker électrodynamique par l'intermédiaire de deux articulations axiales sans jeu (fig. IV-c-1). La base d'encastrement peut être positionnée pour que la partie mobile du shaker étant en équilibre, l'éprouvette soit sans déformation. Son observation entre polariseurs croisés permet de faire très correctement ce réglage.

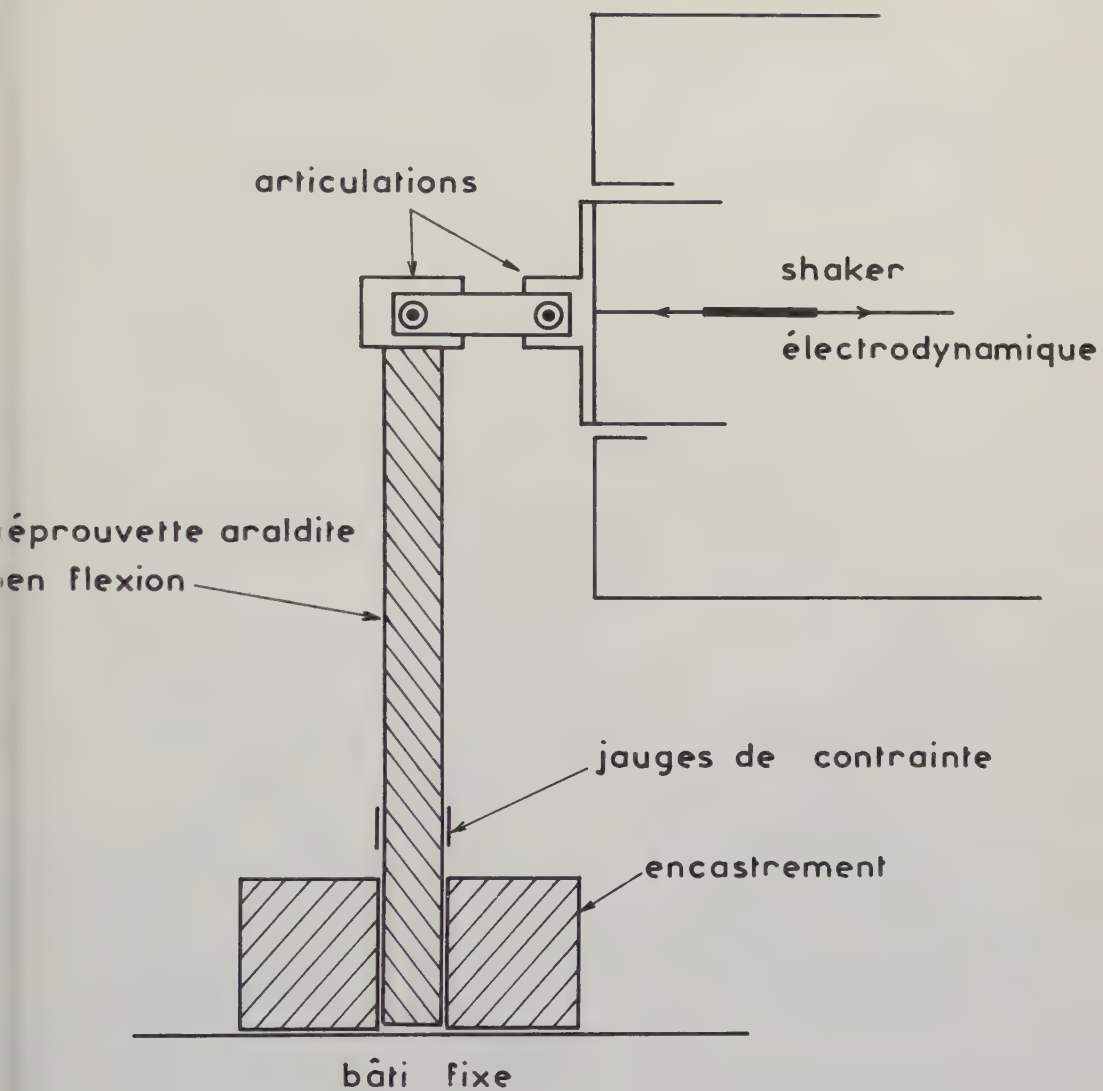


FIGURE (IV - c - 1)
Schéma d'une éprouvette soumise à une flexion
dynamique par un pulsateur électrodynamique (shaker).

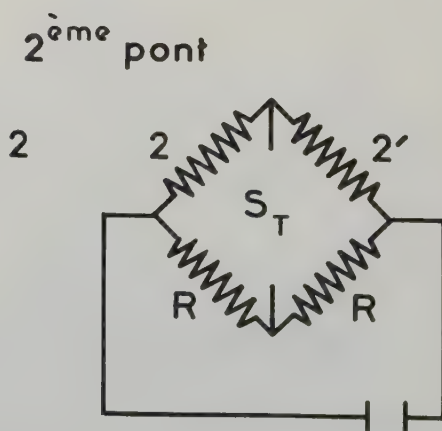
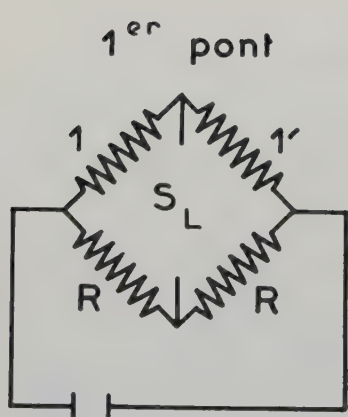
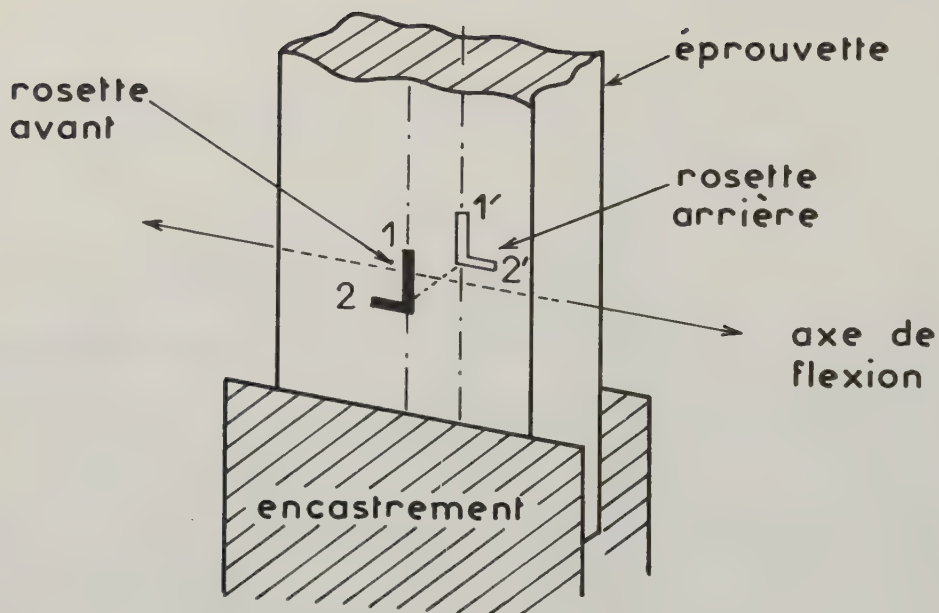


FIGURE (IV - c - 2)
 Schéma montrant la disposition des jauges de contraintes
 sur l'éprouvette et leurs connexions avec
 les branches des ponts d'extensométrie électrique.

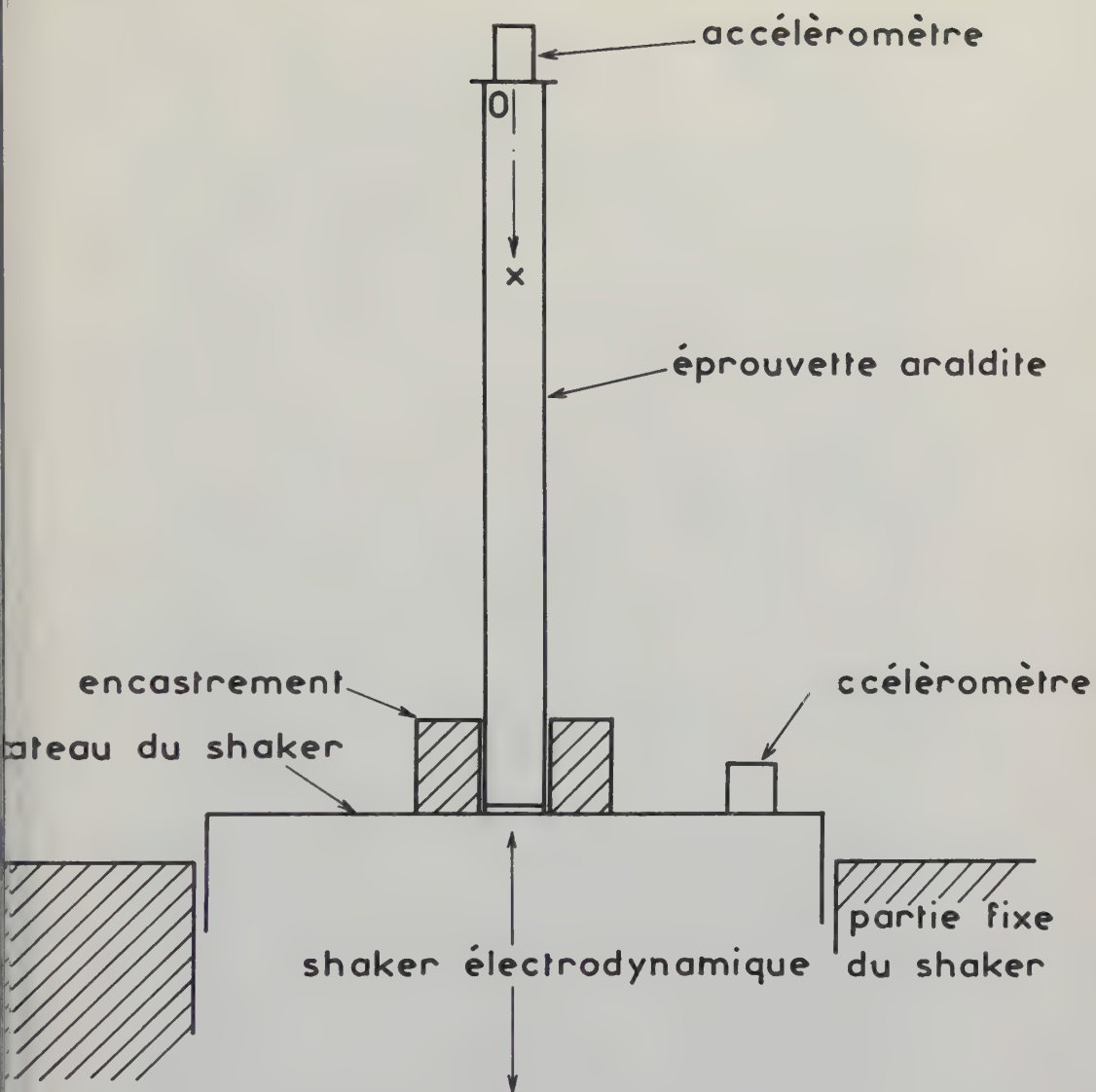


FIGURE (IV - c - 3)

Schéma d'une éprouvette mise en traction-compression dynamique par un pulsateur électrodynamique (shaker).

L'éprouvette peut alors être soumise à une flexion alternative sinusoïdale, considérée comme simple, dont l'axe de flexion est confondu avec son axe transversal moyen. Sur une face fléchie, parallèle à cet axe, le rapport de la déformation longitudinale à la déformation transversale est égal au coefficient de Poisson. Les déformations sont mesurées par une rosette deux jauges à $\pi/2$, collée à 20 mm environ du plan d'encastrement, sur l'axe longitudinal d'une face fléchie. Une de ces jauges est dirigée puis collée précisément suivant cet axe par observation sous microscope à faible grossissement.

Le collage subit un traitement thermique en étuve à 30°C pendant 3 heures. L'influence du fluage sur la réponse de la jauge est ainsi minimisée, d'autant plus qu'il s'agit de sollicitations alternatives et que ν est égal à un rapport de déformations. Pour éviter les effets de température, nous avons en fait collé deux rosettes identiques, face à face, (fig. IV-c-1 et 2). Les deux jauges longitudinales (1) et (1') sont branchées sur un pont d'extensométrie suivant un montage à deux jauges. Les deux jauges transversales (2) et (2') sont montées de la même façon sur un autre pont.

On mesure l'amplitude de chacun des signaux de sortie (S_L) et (S_T) de ces ponts, ainsi que leur différence de phase pour plusieurs valeurs de la fréquence ω . Un phasemètre est nécessaire, car un tracé lissajous formé sur un oscillographe à partir de (S_L) et (S_T) ne permet pas d'apprécier une différence de phase inférieure à 5 ou 10 degrés d'angle. Les essais sont faits à fréquence donnée et doivent être de courte durée pour éviter un échauffement dangereux pour la durée de vie de l'éprouvette.

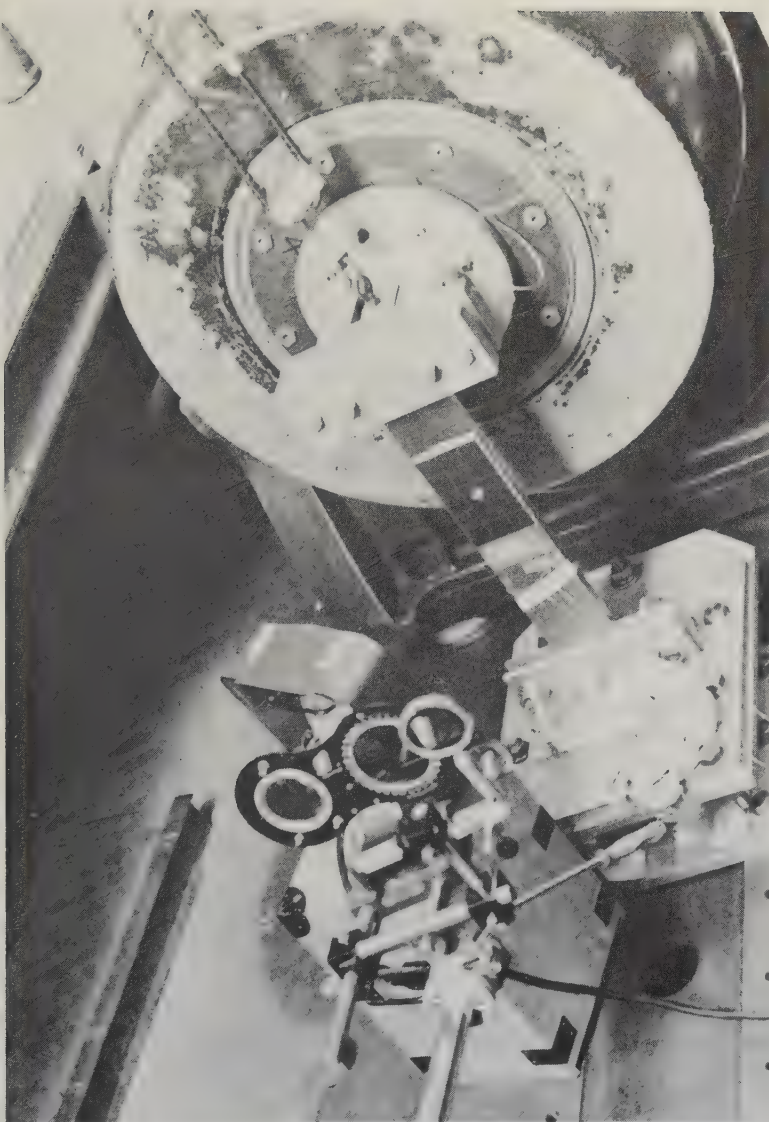
Dans la bande de fréquence de 0 à 2500 Hertz que nous avons explorée, on constate que le rapport : $S_L/S_T = \nu = 0,36$ demeure pratiquement constant aux erreurs de mesure près, et est égal à la valeur obtenue en imprimant à l'éprouvette une flexion statique (ce qui peut se faire avec le même montage). Enfin, le déphasage entre les signaux S_L et S_T est négligeable car toujours inférieur au degré d'angle. Cette vérification ne fait que confirmer les résultats obtenus par divers auteurs sur les araldites, le plexiglas et même certains métaux [III-a-1 et IV-c-1].

B) – Mesure du module d'Young dynamique E^* .

Un barreau d'araldite analogue au précédent est encasté, normalement au plateau horizontal du shaker. Une de ses extrémités est donc libre (fig. IV-c-3). On suppose que le mouvement oscillatoire vertical du plateau crée dans le barreau un état de contraintes unidirectionnel longitudinal.

Dans les axes absolus, l'équation du mouvement est [I-g-1] :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



PLANCHE

*Photographie de la tête d'un shaker animant
une éprouvette en flexion.*

*On distingue le phare stoboscopique et
l'appareil de photoélasticité en premier plan.*

avec

σ : contrainte longitudinale

x : coordonnée longitudinale

ρ : masse volumique

u : déplacement d'un élément à partir de sa position d'équilibre.

t : temps.

En reportant dans la relation visco-élastique linéaire (formule IV-b-4) que l'on suppose valable, il vient :

$$2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{e^{-i\varphi}}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad v^2 = E^*/\rho$$

Soit L la longueur libre de l'éprouvette, les conditions aux limites sont, quel que soit t :

$$3 \quad \begin{aligned} \text{extrémité vibrée : } (u)_{x=L} &= u_L \\ \text{extrémité libre : } \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0 \end{aligned}$$

Si on admet que la solution de l'équation (2) précédente est de la forme :

$$u(x,t) = e^{i\omega t} \cdot u(x)$$

en reportant dans l'équation (2), il est possible de déterminer $u(x)$. En tenant compte des conditions initiales la solution générale s'écrit

$$u = U_L e^{i\omega t} \frac{\cos\left(\frac{\omega x}{v} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)}{\cos\left(\frac{\omega L}{v} e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)}$$

dans laquelle U_L représente l'amplitude du déplacement u_L . Sous une autre forme :

$$4 \quad u = U_L e^{i\omega t} \frac{M(x) + i N(x)}{M(L) + i N(L)}$$

$$5 \quad \text{où} \quad M(x) = \cos\left(\frac{\omega x}{v} \cos\frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\omega x}{v} \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$N(x) = \sin\left(\frac{\omega x}{v} \cos\frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\omega x}{v} \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

et $M(L)$ et $N(L)$ sont ce que deviennent ces expressions lorsqu'on y remplace x par L .

Pour une fréquence ω donnée, φ et v sont des constantes et $M(x)$ et $N(x)$ sont des fonctions de x seulement. Soit U_0 l'amplitude du déplacement du point $x = 0$ on a :

$$r = U_L / U_0 = \cos \left(\frac{\omega L}{v} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right) = M(L) + i N(L)$$

6

Expérimentalement, on peut mesurer le rapport $r = U_L / U_0$, ainsi que la différence de phase φ_u entre U_L et U_0 . De l'équation précédente, on déduit $M(L)$ et $N(L)$. Ces valeurs sont reportées dans les équations (5) où l'on a fait $x = L$ et on peut alors résoudre en φ et v . Connaissant v , la deuxième équation (2) permet de calculer E^* .

REMARQUE :

S'il est possible de donner à ω des valeurs successives ω_p telles que l'on ait :

$$\varphi_u = (2p - 1) \frac{\pi}{2}$$

$$p = 1, 2, 3, \dots$$

Alors $M(L) = 0$ et cela entraîne nécessairement :

$$\cos \left(\frac{\omega_p L}{v} \cos \frac{\varphi}{2} \right) = 0$$

soit

$$\frac{\omega_p L}{v} \cos \frac{\varphi}{2} = (2p - 1) \frac{\pi}{2}$$

8 d'où :

$$v_p = \frac{2\omega_p L \cos \frac{\varphi}{2}}{(2p - 1) \pi}$$

9 et :

$$r_p = N(L) = \sin (2p - 1) \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{\omega_p L}{v} \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

10 soit :

$$r_p = \sin (2p - 1) \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sh} \left[(2p - 1) \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right]$$

donc :

$$\varphi_p = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arg} \operatorname{sh} [r_p / \sin (2p-1) \frac{\pi}{2}]}{(2p-1) \frac{\pi}{2}}$$

Lorsque le rapport r est suffisamment petit pour qu'on puisse confondre $\operatorname{arg} \operatorname{sh} r$ avec $\operatorname{sh} r$, et l'angle φ suffisamment faible pour que $\cos \frac{\varphi}{2}$ et $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ puissent être confondus respectivement avec 1 et $\frac{\varphi}{2}$, alors on peut écrire :

$$v_p = \frac{2 \omega_p L}{(2p-1) \pi}$$

et

$$\varphi_p = \frac{4 \operatorname{sh} [r_p / \sin (2p-1) \frac{\pi}{2}]}{(2p-1) \pi}$$

De même, si on peut donner à ω des valeurs ω_q telles que l'on ait :

$$\varphi_u = q \pi$$

$$q = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Dans ce cas $N(L) = 0$. Cela entraîne exclusivement les conditions :

$$\sin \left(\frac{\omega_p L}{v} \cos \frac{\varphi}{2} \right) = 0.$$

11

ou

$$\varphi = 2 k \pi$$

$$k = 0, 1, 2 \dots$$

La première condition conduit à :

$$\frac{\omega_p L}{v} \cos \frac{\varphi}{2} = q \pi \quad \text{avec} \quad q \neq 0$$

d'où :

$$v_q = \frac{\omega_q L \cos \frac{\varphi}{2}}{q \pi}$$

et

$$r_q = M(L) = \cos q \pi \operatorname{ch} \left(q \pi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\varphi_q = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\arg \operatorname{ch} (\overline{r_q}) / \cos q \pi}{q \pi}$$

la deuxième condition donne $r_q = 1$ correspondant à $q = 0$.

Les mesures de U_L et U_o sont faites à l'aide d'accéléromètres identiques (ENDEVCO type 226—C d'un poids de 2,8 grammes) suivis d'intégrateurs analogues. L'un est collé sur le plateau du shaker en mouvement sinusoïdal, l'autre sur l'extrémité libre de l'éprouvette. Ils sont disposés pour capter les mouvements longitudinaux. Leur masse est considérée comme négligeable par rapport à celle de la pièce sur laquelle ils sont collés. Le rapport $r = U_L / U_o$ est égal au rapport des amplitudes des signaux de sortie de chacune des chaînes de mesure. Accéléromètre-Intégrateurs. Un phasemètre mesure leur différence de phase φ_u .

Les intégrateurs sont réglés préalablement pour qu'à un même signal d'entrée, ils délivrent des signaux de sortie en phase et de même amplitude. Pour faire ce réglage, on les colle d'abord côte à côte sur le plateau du shaker puis on compare sur un oscillographe à deux traces et s le phasemètre les signaux de sortie de chaque chaîne pour plusieurs fréquence d'excitation du shaker.

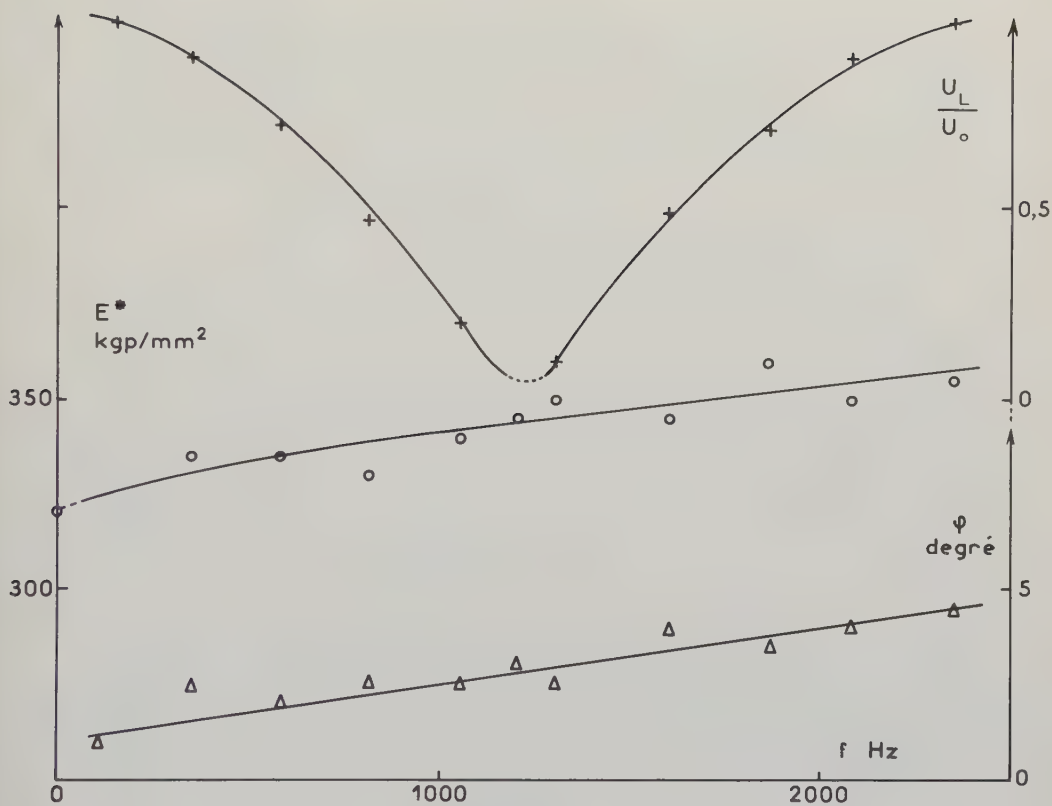
Le tableau [IV-c-1] ainsi que le graphe correspondant indiquent les valeurs moyennes obtenues. Entre 0 et 2500 Hz le module du rapport $r = U_L / U_o$ présente un minimum (qui ne peut être nul théoriquement que si $\varphi = 0$) pour une fréquence f_1 voisine de 1250 Hz et un angle de phase φ_1 de l'ordre de 3 degrés. Ces valeurs correspondent à l'ordre $p = 1$ de la formule (IV-c-7) et la formule (IV-c-8) permet de calculer la vitesse v_1 corrélative. On trouve $v_1 = 1740$ m/s.

Le déphasage φ demeure faible. Il augmente semble-t-il lentement avec la fréquence et on constate qu'il en est de même pour E^* qui reste supérieur à la valeur statique de 320 kgp/mm^2 . Par une méthode toute différente, HORST SWEIGER [IV-c-2] a obtenu pour une araldite D, un déphasage φ plus faible encore (entre 2 et 3 degrés d'angle dans la bande de fréquence de 0 à 3000 Hz) et compte tenu des erreurs, il admet que φ peut-être considéré comme constant. En ce qui nous concerne, et bien que nos résultats soient aussi peu précis, il semble, tout de même y avoir une légère croissance de φ avec la fréquence. On rappelle que du point de vue théorique CINI a montré que E^* et φ sont nécessairement des fonctions de la pulsation ω si l'équation de comportement du matériau est linéaire [IV-b-1]. Dans notre étude nous avons justement admis que le matériau araldite se comportait visco-élastiquement suivant une loi linéaire représentée par la formule (IV-b-4). On doit donc conclure que dans la bande de fréquence explorée, l'influence de la fréquence, si elle existe, reste

TABLEAU (IV - c - 1)

f Hz	$\omega L = 2\pi f$ m	φ_u degré	U_L/U_o	φ degré	v m/s	E^* kgp/mm ²
110	242	0	0,99	1	1645	325
350	769	0,3	0,90	2,5	1670	335
580	1275	0,7	0,72	2	1670	335
810	1781	2,5	0,48	2,5	1658	330
1050	2308	8,5	0,20	2,5	1684	340
1200	2640	72	0,041	3	1695	345
1300	2858	90+70	0,11	2,5	1708	350
1600	3517	90+82	0,49	4,0	1695	345
1860	4081	90+86	0,71	3,5	1732	360
2080	4573	90+87,5	0,90	4	1708	350
2350	5167	90+89	0,99	4,5	1720	355

Données : $L = 0,35 \text{ m}$ $\rho = 1,20 \text{ g/cm}^3$



GRAPHE (IV - c - 1)
 Résultats expérimentaux d'après le tableau (IV-c-1).

cependant négligeable sur le déphasage φ entre la contrainte et la déformation. Il n'en est pas de même sur E^* dont la valeur expérimentale croît de 320 à 360 kgp/mm² environ. Cette augmentation est légèrement supérieure à celle que laisse prévoir la relation :

$$dE^*/E^* = \operatorname{tg} \varphi$$

Pour $\varphi = 5$ degrés, elle conduit à $dE^* \simeq 30 \text{ kgp/mm}^2$ soit $E^* = 350 \text{ kgp/mm}^2$ pour $f = 2500 \text{ Hz}$, au lieu de $E^* = 360 \text{ kgp/mm}^2$ comme l'indique le graphe (IV-c-1). L'écart est faible et inférieur au domaine d'erreur qui est de l'ordre de 4 %. On remarquera cependant qu'on ne peut pas tirer de conclusion certaine des calculs précédents car l'indétermination sur φ est relativement élevée d'une part et d'autre part au cours des essais l'éprouvette s'échauffe légèrement ce qui a pour effet de diminuer la valeur de E et faire apparaître E^* plus faible que prévu.

C) – Mesure de la constante optico-mécanique K^* .

C'est la plus simple à déterminer puisqu'il suffit de faire des mesures de biréfringence et de déformation différentielle dans un milieu dynamiquement sollicité.

Une éprouvette analogue à celle utilisée pour les essais précédents est soumise à une traction longitudinale simple d'évolution sinusoïdale ondulée, pour éviter les phénomènes de flambage. Des rosettes permettent de mesurer la différence ($\epsilon_1 - \epsilon_2$) des déformations principales respectivement longitudinale et transversale. Un flash stroboscopique dirigé normalement au plan de ces déformations et synchronisé sur les variations de cette différence permet une mesure de la biréfringence comme en statique. On emploiera la méthode de Tardy suffisamment précise pour ce type d'essai.

L'éprouvette en araldite est fixée par collage dans des mâchoires métalliques respectivement liées au shaker et à un massif fixe [fig. IV-c-4]. Cette dernière liaison est légèrement réglable pour pouvoir exercer une traction statique à laquelle devra être ajoutée la traction sinusoïdale imposée par le shaker. On s'arrange pour que l'éprouvette ne soit jamais en compression mais toujours soumise à une traction longitudinale sinusoïdalement ondulée.

Un tiers environ de l'éprouvette reste hors des mâchoires. C'est au centre de cette partie qu'on fera les mesures de biréfringence. De part et d'autre de ce centre, on a collé deux rosettes ordinaires bi-jauges à $\pi/2$. Un élément de chacune d'elle est aligné sur l'axe transversal central (fig. IV-c-4). Un montage en pont complet comme nous l'avons indiqué au paragraphe (II-f) permet la mesure de ($\epsilon_1 - \epsilon_2$) soit sur un voltmètre crête à crête suffisamment sensible, soit sur un oscillographe.

Le flash stroboscopique peut être synchronisé mais aussi déphasé d'un angle repérable. En déphasant ainsi l'éclair par rapport à la différence des déformations principales et

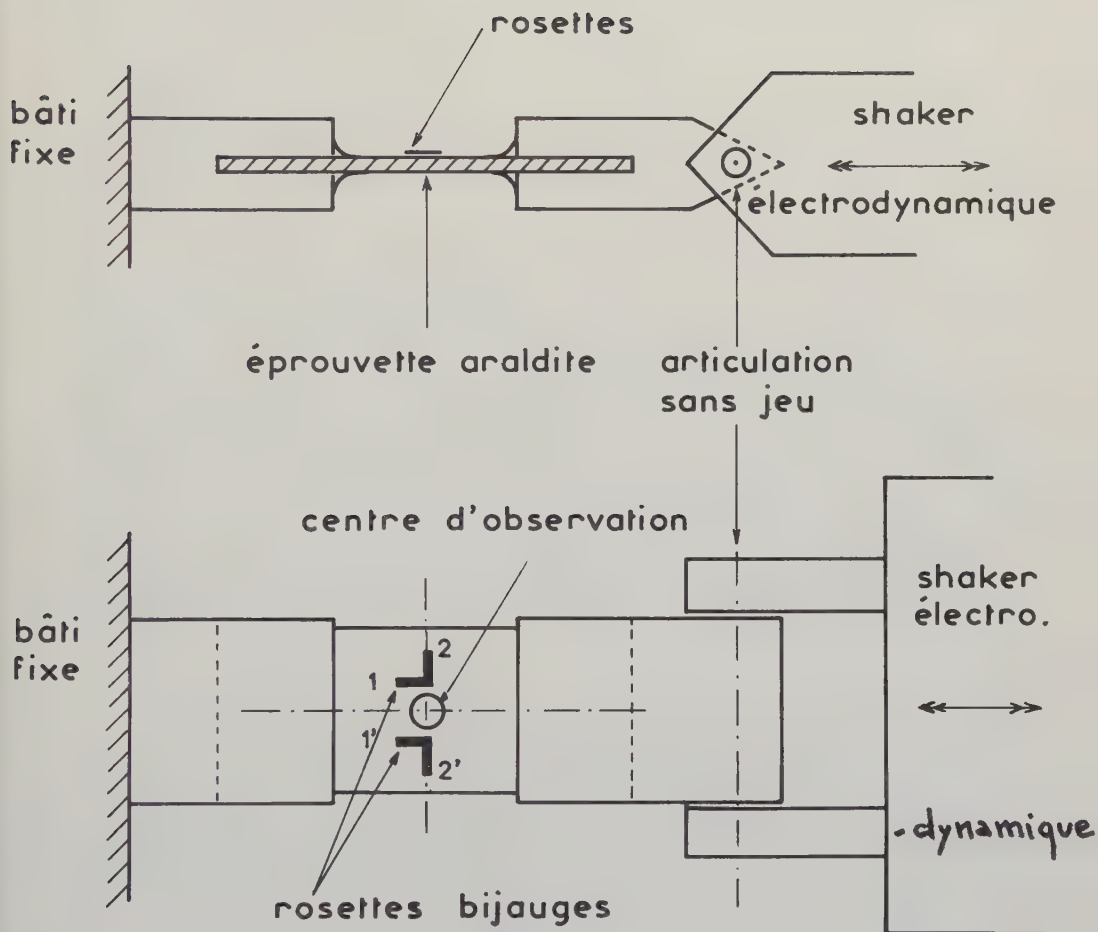
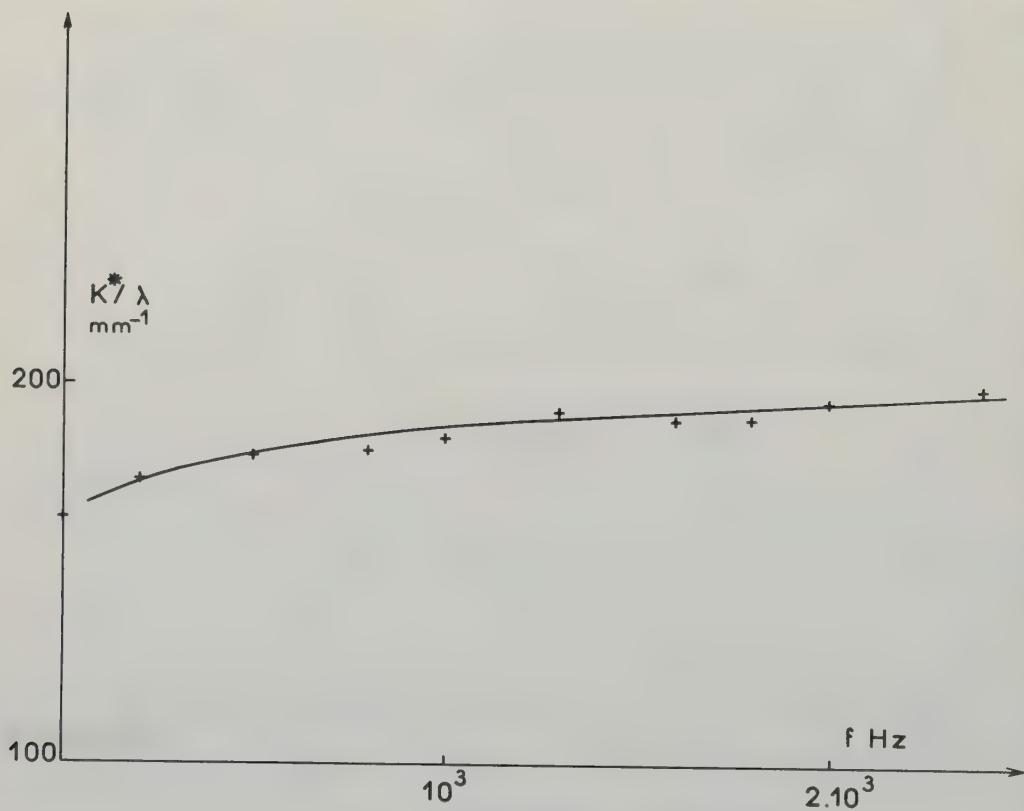


FIGURE (IV - c - 4)

Shéma de montage d'une éprouvette soumise à une traction ondulée par un pulsateur électrodynamique (shaker).



GRAPHE (IV - c - 2)
 Résultats expérimentaux concernant l'araldite.

en mesurant la biréfringence, on constate que celle-ci est bien maximum en même temps que la déformation différentielle. Et cela dans toute l'étendue de la bande des fréquences essayées. A la précision des mesures près (2° d'angle environ) on ne peut pas dire qu'il y a un déphasage φ_e entre la biréfringence et la déformation différentielle.

Pour éviter la détérioration de l'éprouvette par échauffement, le temps d'une mesure à une fréquence donnée doit être court (1 minute maximum) et suivi d'un temps d'arrêt de 5 à 6 minutes environ avant de faire une série de mesures pour une nouvelle valeur de la fréquence.

Le module K^* s'obtient en faisant le rapport de la biréfringence maximum à la déformation différentielle maximum.

Sur le graphe (IV-c-2) sont marqués les points expérimentaux représentant K^*/λ en fonction de la fréquence de l'excitateur électrodynamique. Nous avons tracé en trait plein l'allure que pourrait avoir la courbe d'évolution correspondante. La longueur d'onde du flash utilisé est $\lambda = 546.10^{-6}$ mm. Il semble qu'entre 0 et 10^3 Hz environ le module de la constante optico-mécanique K^* augmente légèrement, puis demeure sensiblement constant entre 10^3 et $2.5.10^3$ Hz. Cela est en accord avec les résultats d'autres auteurs [IV-c-1]. On rappelle que la valeur statique de K est 0,09.

Compte tenu de la relation entre les constantes caractéristiques K et C d'un matériau en évolution élastique, il est inutile à priori de faire l'étude des variations de C^* avec la fréquence. Il reste à faire l'étude des constantes caractéristiques dynamiques A^* et B^* .

D) – Etudes des caractéristique A^* et B^* .

Une étude directe comme nous l'avons fait pour ν^* , E^* et K^* est impossible. A partir des formules établies, on ne peut pas en effet isoler A^* ou B^* pour en faire l'étude en fréquence et cela d'autant plus que pour un dispositif d'action périodique, tel un shaker par exemple, le déplacement du plateau, la force qu'il développe et la fréquence d'évolution sont étroitement liés.

On peut cependant effectuer une étude indirecte à partir des relations (IV-b-8). Prenons par exemple la deuxième :

$$K^* = A^* \frac{E^*}{(1 + \nu)} + B^*$$

Si on connaît l'évolution de $K^*(f)$ et $\frac{E^*(f)}{(1 + \nu)}$ en fonction de la fréquence f ou de la pulsation $\omega = 2 \pi f$, il est possible de tracer un graphe représentant :

$$K^* \text{ en fonction de } E^*/(1 + \nu)$$

pour différentes valeurs de la fréquence. On peut alors envisager plusieurs possibilités :

1°) la représentation est une droite.

On doit alors admettre que les modules A^ et B^* sont constants, indépendants de f et peuvent être calculés à partir des éléments de la droite (pente et ordonnée à l'origine). Par ailleurs, s'il en est ainsi, en dérivant l'expression précédente par rapport à f , il vient :*

$$A^* \frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{E^*}{1 + \nu} \right) = \frac{\partial}{\partial f} K^*$$

Comme A^ est une quantité positive, on déduit que les évolutions de E^* et K^* en fonction de f ont même sens de variation.*

2°) la représentation est une courbe.

Il est évident alors que les modules A^ et B^* dépendent de la fréquence. En un point M de cette courbe, auquel correspond une fréquence f connue, existe une tangente dont la pente permet de connaître la valeur de A^* pour cette fréquence. On peut donc déterminer $A^*(f)$ et les relations (IV-b-8) achèvent alors de déterminer $B^*(f)$.*

Donc, dans tous les cas la connaissance de $\frac{E^}{1 + \nu}(f)$ et $K^*(f)$ sont utiles à la détermination des modules de A^* et B^* en fonction de la fréquence. On ne peut rien dire sur la phase.*

A partir de résultats expérimentaux obtenus, représentés sur les graphes [IV-c-1 et 2] nous en avons déduit le graphe [IV-c-3] qui représente K^/λ en fonction de E^* puisque nous avons vu que ν peut être considéré comme indépendant de f . On constate que dans la bande des fréquences balayée (0 à $2,5 \cdot 10^3$ Hz) la représentation est pratiquement rectiligne. Cela tend à prouver que les modules dynamiques A^* et B^* de l'araldite utilisée (provenant d'une autre origine que celle employée pour les essais statiques) sont indépendants de la fréquence et en particulier de la vitesse de charge. C'est ce que nous avons déjà remarqué lors des essais consignés au paragraphe (II-h).*

De l'observation des graphes [IV-c-1 et 2] il ressort que les évolutions des modules E^ et K^* en fonction de f ont effectivement même sens de variation comme nous l'avions prévu. Cela se vérifie aussi sur les résultats de HORST-SWEIGER [IV-c-1].*

E) — Observations

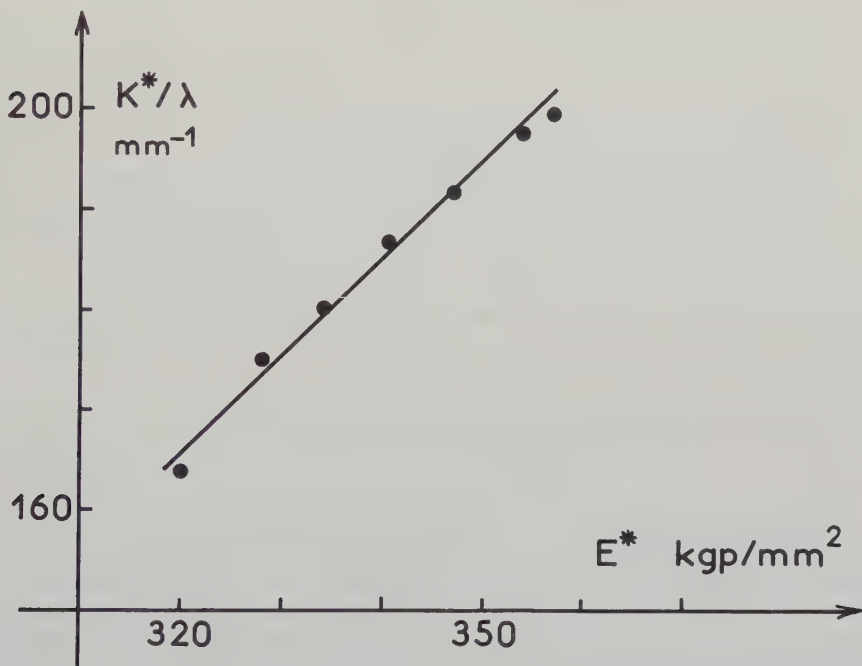
L'étude dynamique est difficile et nos résultats ne sont pas encore suffisamment assurés. Pour l'araldite utilisée, on peut affirmer cependant :

a) les modules E^* et K^* sont respectivement supérieurs aux valeurs statiques correspondantes.

b) l'évolution du module A^* en fonction de f est directement liée à l'allure de la courbe K^* en fonction de $E^*/(1 + \nu)$, et plus précisément à la pente de la tangente.

c) l'évolution du module B^* en fonction de f , se déduit alors de la connaissance de $A^*(f)$ et des relations (IV-b-8).

On notera la grande utilité qu'il y a de connaître $E^*(f)$ et $K^*(f)$ pour mieux cerner les valeurs de $A^*(f)$ et $B^*(f)$.



GRAPHE (IV - c - 3)

Résultats expérimentaux concernant l'araldite
dédiés du tableau (IV-c-1) et du graphe (IV-c-2).

CHAPITRE V

CONCLUSIONS

Les phénomènes de biréfringence qui apparaissent sur certains matériaux subissant des sollicitations mécaniques sont gouvernés par les lois connues de NEUMANN et MAXWELL dans le domaine relativement étroit de l'élasticité proportionnelle.

Ce mémoire montre comment il est possible de transformer les expressions de ces lois et de les présenter sous une forme nouvelle et concise. La définition et l'introduction d'un tenseur mécanique permet de leur donner une forme unique et simple mettant en relation les tenseurs des déformations des contraintes et des indices, en même temps qu'elle fait apparaître deux constantes caractéristiques nouvelles du matériau. Valable au delà du domaine élastique, cette formulation est susceptible de généralisation et de meilleure adaptation pour tenir compte des lois de comportement rhéologique particulier. Elle met surtout en évidence le rôle primordial joué par l'équiaxialité ou non des tenseurs contrainte et déformation, qui conditionne la linéarité ou non de la nouvelle relation photoélasticimétrique.

Des vérifications précises dans le cas de coaxialité et de non coaxialité, effectuées sur l'araldite nous ont donné satisfaction, et bien que limitées, constituent un sérieux encouragement à poursuivre les mesures sur d'autres matériaux.

Les vérifications dans le domaine dynamique sont plus imprécises. Les mesures sont plus délicates et cependant des résultats ont été acquis et un effort particulier dans ce domaine ne semble pas impossible.

L'extrême souplesse de la forme des lois proposées permet d'envisager son application dans les techniques de la lumière diffusée qui facilite l'étude de la biréfringence tridimensionnelle, ainsi que celle des ultra-sons qui permet l'analyse dynamique à haute fréquence. Elle permet aussi d'aborder plus facilement certains problèmes tels que : l'importance de la non coaxialité des tenseurs contrainte et déformation sur le comportement d'un matériau, sur l'application du principe de superposition, et sur l'utilisation des conditions de similitude. Un domaine particulier de recherche peut ainsi être exploité pour mieux comprendre les lois de comportement de certains matériaux.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CHAPITRE 0

- [0 - 1] – *LE BOITEUX*. — *Mécanique des Solides réels* — *BERANGER*
 Elasticité et Photoélasticité — *HERMANN*. PARIS
– *FILON*. — *Manuel de Photoélasticité* — *DUNOD*. PARIS 1942
– *FROCHT*. — *Photoelasticity. I et II* — *John Wiley and Sons*.
 LONDON, 1949
– *KAMMERER*. — *Recherches en Photoélasticité* — *HERMANN*.
 PARIS, 1944
– *JESSOP et HARRIS*. — *Photoélasticité* — *DUNOD*. PARIS, 1952
- [0 - 2] – *Laboratoires de Photoélasticité, principalement :*
– *O.N.E.R.A.* — 29 Avenue de la division Leclerc, 92 — *CHATILLON*
– *S.N.C.F.* — 122, Rue J. JAURES, 92 — *LEVALLOIS-PERRET*
– *Direction Technique des Constructions Navales*, 8 Boulevard
 Victor, 75 — PARIS 15ème
– *MICROMESURE-EUROPE 7*, Avenue J. JAURES, 92 — *MALAKOFF*
– *Laboratoire Central des Ponts et Chaussées*, 58 Boulevard
 Lefebvre 75 — PARIS 15ème
- [0 - 3] – *Milieux continus et Photoélasticité* — *Conférences E.N.S.E.M.*
 17-18-19 Janv. 1968

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CHAPITRE I

- [I - a - 1] – *FROCHT M.M* — *Photoelasticity* — *John Wiley and Sons*,
 London, 1949.
- [I - a - 2] – *F.E. NEUMANN* — *Abh Akad. BERLIN* part. ii 1 - 254, 1841.
- [I - a - 3] – *C. MAXWELL* — *Sc. papers*, Vol 1, p. 30, 1852.
- [I - a - 4] – *E.G. COKER et L.N.G. FILON* *Treatise on Photoelasticity* —
 Cambridge University Press, LONDON, 1931 et 1957.

- M.M. FROCHT – *Photoelasticity* – John Wiley and Sons, LONDON, 1949.
- H.I. JESSOP § F.C. HARRIS – *Photoélasticité* – DUNOD, PARIS, 1952.

- [I - b - 1] – A. KAMMERER – *Recherches sur la Photoélasticité* – HERMANN, PARIS, 1944, page 28.

- [I - b - 2] – G. BRUHAT – *Physique générale – Optique*. MASSON, PARIS, 1947 et 1967.
- SOMMERFIELD – *Optics* – Academic Press, LONDON, 1954.

- [I - d - 1] – STATTON – *Théorie de l'électromagnétisme* – DUNOD PARIS, 1961,
- JONES – *Electromagnetism* – Pergamon Press, LONDON, 1964.

- [I - e - 1] – P. ACLOQUE – *Méthode et Appareil pour la séparation immédiate des contraintes* – *Revue d'optique*, t-34, n^o 11 1956.

- [I - e - 2] – J. COURBON – *Cours de Résistance des Matériaux*. DUNOD, PARIS, 1955, pages 52 et 53.

- [I - e - 3] – G. GONTIER – *Sur l'isotropie des correspondances entre tenseurs euclidiens du premier et du deuxième ordre* – *Conférences A.U.M.F. – Institut de mécanique des fluides*, LILLE, 1964.

- [I - f - 1] – L.N.G. FILON – *Manuel de Photoélasticité* – DUNOD, PARIS, 1942, p. 40.

- [I - g - 1] – SOKOLNIKOF – *Mathematical theory of Elasticity* – Mac Graw Hill, 2e Ed^o, 1956.
- P. GERMAIN – *Mécanique des Milieux Continus* – MASSON, PARIS, 1962.
- J. GOSSE – *Mécanique des Milieux déformables* – *Cours E.N.S.E.M.* – NANCY, 1968.
- B. PERZOZ – *La Rhéologie* – MASSON, PARIS, 1969.
- G. GONTIER – *Mécanique des Milieux Continus* – DUNOD, PARIS, 1969.

- [I - g - 2] – LEE § ARMSTRONG – *J. Applied Mech.* 5 p. A II, 1938.
- MYLONAS – *Proc. Inst. Mech. Engrs*, 158, p. 244, 1948.

- D'AGOSTINO – DRUKER – LIEU – MYLONAS – *An Analysis of plastic Behaviour of Metal with Bonded Birefringent plastic – Proceeding SESA, 1954 – 12 – 2, p. 115-122.*
- KAWATA – *On the Photoelastic Behaviour of Polymers – Proc. of the 4th Japan Nat. Congress for Applied Mech, 1954, p. 97-99.*
- THEOCARIS and MYLONAS – *Viscoelastic Effects in Birefringent Coatings – J. Appl. Rech, 1961, 28, p. 601-607.*
- THEOCARIS – *Viscoelastic Properties of Epoxy Resins at different temperatures – Rheology Acta 2, 1962, p. 92-96.*
- BETTANY and FESSEL – *Birefringence Behaviour of an Epoxy Resin in Compression – Brit. J. Appl. Phy, 1963, – 14, p. 692-695.*

[I - g - 3]

- HETENYI – *Handbook of Experimental Stress Analysis – John Wiley and Sons, LONDON, 1950, (nombreuses références pages 965).*
- G. MALLET – *Emploi de l'araldite et Méthode de figeage – S.F.M, sep, 1951, n°2, p. 27.*
- FAURE – *Procédé du figeage des contraintes à température ambiante – Rev. Franç. de Méca. 1965, n° 16, p. 43-50.*

[I - j - 1]

- ALLISON and KERLEY – *The Physical Properties of Araldite. Conferences on Stress Analysis to Day – University of BRISTOL (Rapport non publié) 7 – 9 – 4/1965.*
- VEAUX – *Propriétés et mises en oeuvre des araldites – Com. Europ. de l'Energie Atomique, Doc. Euratom, n° 3604 f, 1967.*
- MONDINA – *Ricerche preliminari sulla applicazione della fotoelasticita allo studio di mezzi forzati a caldo su alberi – Ingegneria Meccanica 1964 – 8 – 10.*
- Société SAINT GOBAIN PARIS – *Vente et diffusion de documents sur les différentes sortes d'araldite photoélastique.*

[I - j - 2]

- D'AGOSTINO – DRUKER – LIU – MYLONAS – *Epoxy Adhesives and Casting Resins as Photoelastic Plastics – Proceeding SESA 12 (1954) 2.*
- LEVEN – *Epoxy Resins for Photoelastic Use – Proceeding of the International Symposium – Illinois Institute of Technology CHICAGO III – 1961, Pergamon Press, 1963.*
- WOLF – *Spannungs optik – Siemens Schuckerwerke AG Springer Verlag BERLIN, Gottingen – HEIDELBERG, 1961.*

- KNAPP – *Les résines Epoxy* – Revue BROWN BOVERI 52 (1965) p. 575-589.
- A.H. ROBERT – *Rapport sur deux expériences simples* – Rapport E.N.S.E.M., NANCY, 1966.
- [I - j - 3] – VEAUX – *Propriétés et mises en oeuvres des araldites* – Com. Europ. de l'Energie Atomique, Doc. Euratom, n° 3604 f, 1967, p. 81-83.
- [I - j - 4] – FESSLER and LEWIN – *A Study of Large Strains and the Effect of Different Values of Poisson's Ratio* – Brit. J. Appl. Phys, II (1960), p. 273-275.
- [I - I - 1] – GERMAIN – *Mécanique des Milieux Continus* – Masson, PARIS, 1962.
- ILLIOUCHINE – *Plasticité – Déformations Elastico-Plastiques* Eyrolles, 1956.
- LEVI-PIZZETTI – *Fluage, Plasticité* – DUNOD, 1951.
- [I - I - 2] – TOUPIN – *A Dynamical Theory of Elastic Dielectrics* – Int. J. Engngs Sc, 1963, n° 1, p. 100-126.
- [I - I - 3] – TATSU TAKUOKA – *Theoretical Investigation of Birefringence Deformation Relations in Photo-élasto-Plasticity* – Int. J. Solid. Structures, 1965, Vol. I, p. 343-350.
- *Mechanical Foundations of Birefringence of Elastic Media and Viscous Media* – Int. J. Engng, Sc, 1966, Vol. 4, p. 23-40.
- [I - I - 4] – KAMMERER – *Les propriétés mécaniques des solides réels et la théorie de l'élasticité.* HERMANN. PARIS 1951.
- DRUKER – *Introduction ot Mechanics of Deformable solids* – Mc. Graw HILL-BOOK, 1967.
- PERZOZ – *La Rhéologie* – MASSON, 1969.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CHAPITRE II

- [II - a - 1] – GUILLEMIN-FRAPPIER – *Etude théorique de l'incidence oblique en photoélasticimétrie* – Analyse des Contraintes, T. V, n° 3, 7, 9, 1960.
- A. ROBERT et E. GUILLEMET – *Nouvelle méthode d'utilisation de la lumière diffusée en photoélasticimétrie à trois dimensions* – Rev. Fr. de Mec., n° 5, 6, 7, 8, 1963.

- A. ROBERT et J.L. VERNET — *Applications de la Photoélasticimétrie à de nouveaux procédés automatiques de détermination des axes et du déphasage d'un milieu biréfringent* — *Conférences 3ème Congrès International d'Analyse des Contraintes*, Berlin 1966.
- A. H. ROBERT. — *Note sur la méthode de l'incidence oblique* — *Publication E.N.S.E.M., NANCY, 1966.*

- [II - b - 1] — VEAUX. — *Propriétés et mises en oeuvre des araldites* — *Com. Europ. de l'Energie Atomique, Doc. Euratom. n° 3604,f, 1967, p. 15.*

- [II - c - 1] — S.S. MANSON. — *Les Contraintes d'origine thermique* — *DUNOD, PARIS 1967.*

- [II - e - 1] — BRUHAT. — *Optique* — *MASSON, PARIS, 1947, p. 342 et 421.*

- [II - e - 2] — MICROMESURE—EUROPE. — 7 Avenue Jean Jaurès 92 — MALAKOFF *Manuel d'instruction Modèle 030 page 11.*
 — J. AVRIL. — *Manuel d'analyse expérimentale des contraintes* — BUDD. S.A. 92 — NEUILLY/SEINE 1967, p. 88 et 96.

- [II - e - 3] — JESSOP et HARRIS. — *Photoelasticité* — *DUNOD, PARIS, 1952, p. 91.*

- [II - e - 4] — WARREN — C. YOUNG. — *An automated Process for Three Dimensional Photoelastic Analysis* — *Exp. Mech, 1969, p. 275.*

- [II - f - 1] — ZELBSTEIN — *Techniques et utilisations des Jauges de contraintes* — *DUNOD, 1956.*
 — *Extensométrie 67.* — G.A.M.A.C. 10, Rue Vauquelin PARIS 5ème.

- [II - f - 2] — AVRIL. — *Manuel d'Analyse des Contraintes* — *Edition BUDD. Avenue de Neuilly 92 — NEUILLY/SEINE. Page 65.*

- [II - g - 1] — *SONDES THERMIQUES BUDD en NIKEL SENSOR. Voir documentation BUDD N° B.N. 9000 F. BUDD S.A. Avenue de Neuilly 92 — NEUILLY/SEINE.*

- [II - j - 1] — D'AGOSTINO, DRUKER, LIU, MYLONAS. — *Epoxy Adhesives and Casting Resins as Photoelastic Plastics* — *Proceedings SESA, 12 (1954) 2.*

- [II - j - 2] — CALCOTE et BOWMAN. — *Experimental détermination of Elastic-plastic Boundary* — *Exp. Mech.* August, 1965, pp. 262.
- [II - k - 1] — ROBERT — A.H. — *Photoélasticité — Etude des erreurs possibles.* Publication E.N.S.E.M. 1966.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CHAPITRE III

- [III - a - 1] — MARIN — ULRICH — HUGES. — *Plastic Stress — Strain Relation for Aluminium Alloys subjected to biaxial tensile stress* — NACA, Technical Note, 24.25, 1951.
- [III - a - 2] — HILAR. K. ABEN. — *Optical Phenomena in Photoelastic Models by Rotation of Principal Axis* — *Exp. Mech.* Janvier 1966. p. 13-22.
- [III - a - 3] — FROCHT — *Experiments in Mechanical and optical coincidence in Photo-plasticity* — *Exp. Mech.* 1961, p. 4348.
— *On The Meaning of Isoclinic Parameter in the Plastic State in Cellulose Nitrate* — *J. Appl. Mech.* March. 1962/1.
- [III - c - 1] — ROBERT A.H. — *Rapport sur deux expériences simples* — Rapport E.N.S.E.M., NANCY, 1966.
- [III - c - 2] — ROBERT A.H. — *Formulation théorique des conditions de similitude. Similitude approchée de certaines lois de comportement* — Rapport E.N.S.E.M., NANCY, 1967.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CHAPITRE IV

- [IV - a - 1] — RICHARD. — STEIN, SIGEHARU ONIGI, DANIEL. A. KEEDY *The dynamic Birefringence of Hight Polymers* — *J. of Polymers Sc.* Vol. 57, 1962, p. 801-821.

— TRELOAR. — *The Photoelastic Properties of Rubber* — *Trans of Faraday Soc.* 1947, p. 277-293.

[IV - a - 2] — HETENYI. — *A study of Photoplasticity* — 1st. US. Nat. Congress of Appl. Rech. III. Inst. of Tech. Juin 1951.

[IV - a - 3] — HUI PIH. — *Photoélastic Studies of the Two-dimensional Dynamic Stress-optic Law* — *Exp. Rech.* Fev. 63, p. 33.
— CLARK and SANFORD. — *A comparison of static and Dynamic Properties of Photoelastic Materials* — *Exp. Mech.* June 63, p. 148.
— FLYNN. — *Dynamic Photoelasticity* — *ISA. TRANSACTIONS* Vol. 5, n° 1, p. 165.
— *Photoelastic Studies of Dynamic Stresses in High modulus* — *Jour. of the Soc. of Mov. Pic. and Telev. Engineers.* Août 1966, vol. 75, p. 729.
— DANIEL. — *Experimental Methods for Dynamic Stress Analysis in Viscoelastic Materials* — *Jour. of Appl. Mech.* 1965, p. 1-9. *Transactions of ASME.*
— HORST SWEIGER. — *The Photostress Method as applied to the Analysis of Dynamic States of Stress* — *Material Prüf.* 7 (1965) Nr. 7 Juli.
— KOJI KOIBUCHI § MASAMI YAMANE. — *Stress-Strain Curves under Variable Stresses* — *Bull. of JSME* 1967, vol. 10, n° 40, p. 601-610.
— CLARK. — *Static and Dynamic Calibration of CR-39* — *SESA PROCEEDINGS.* Vol. XIV, n° 1, p. 195-204 (1962).

[IV - a - 4] — CLARK and SANFORD. — *Static and Dynamic Properties of Photoelastic Materials* — *Proceedings SESA* Vol. XIV, p. 195, (1962).

[IV - a - 5] — CHRISTESCU. — *Dynamic Plasticity* — North-Holland Publi-Company. Amsterdam.

[IV - a - 6] — DANIEL. — *Static and dynamic stress analysis* — *Thesis.* III. Inst. of Tech. 1964.

[IV - a - 7] — BROWN and SELWAY. — *Frequency response of Photo-viscoelastic Materials* — *Exp. Mech.* March. 1964, p. 67-63.

- [IV - a - 8] – DANIEL. – *Dynamic Properties of Photovisco elastic Materials – Exp. Mech.* 1965, p. 183.
- [IV - b - 1] – CLINI. – *The Response Characteristics of Linear Systems – J. of Appl. Phys.* 21 (1950), p. 8.
- [IV - c - 1] – HORST SWEIGER – *The Photo Stress Method as applied to the Analysis of Dynamic States of Stress –Material Prüf* 7 (1965) Nr. 7 Juli.

Nom de l'étudiant : A. Henri ROBERT

Nature de la thèse : DOCTORAT ES—SCIENCES PHYSIQUES

THESE SUR LES LOIS DE LA PHOTOELASTICITE

Vu, approuvé
et permis d'imprimer
Nancy, le 24 Avril 1970

Le Doyen de la Faculté
des Sciences de NANCY

J. AUBRY

Cet exemplaire est imprimé
à des fins particulières et ne
peut en aucun cas être vendu.

Achevé d'imprimer le 29 Mai 1970
à l'Atelier de Documentation Universitaire
3, Rue Sellier — NANCY

Dépôt légal n° 648 Faculté des Sciences Editeur
2ème trimestre 1970

